FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXXI

Palchetto

Num° d' ordine 16

21493

5-E 26

NAZIONALE
B. Prov.
I
545
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. P
I
545-546

Digitized by Google

NOVA SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA.

Officio Topografico

OFFICIO TOPOGRAFICO

Digitized by Google

Digitized by Google

606712
SBN

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

Conſcripta ad uſum

FAUSTINÆ PIGNATELLI

Principis Colubranenſis, & Tolvenſis Ducatus Hæredis

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Profeſſore

TOM. I.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Excudebat FELIX MOSCA ſumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI

MDCCXXXIV.

Digitized by Google

FAUSTINÆ
PIGNATELLI
Principi Colubranenſi, ac Tolvenſis Ducatus Hæredi.

PLuribus impellor, PRINCEPS EXCELLENTISSIMA, ut nova iſta Sectionum Conicarum Elementa, Nomini tuo dicata, in lucem emittam. Primum eſt, quod, quemadmodum juſſu tuo privatim conſcripta ſunt; ſic etiam bono publico conſilio, ac

ſuaſione tua lucem adſpiciunt . Deinde, quod, ſi aliquem exinde fructum ſtudioſa Juventus ſit perceptura, Tibi potius ferri debet acceptus . Et denique , quod in rebus hiſce adeo jam excellis , ut vix ſit, qui ab invidiæ morſibus ea aptius tueri queat . Potius ſortem meam ſingularem cunctis teſtandam hic reor . Nam , non eo tantum honore me cumulaſti , ut in Tui commodum , & uſum Elementa iſta conſcriberem ; ſed pateris quoque , ut, dum publici juris fiunt , tuum illuſtre Nomen in fronte gerant . Hinc multum abeſt, ut publico hoc teſtimonio mei erga Te officii partem aliquam perſolvere credam ; ſed ultro fateor , novum mihi beneficium conferri , quod labor hic meus , tanto Nomine ornatus, in lucem emittatur . Id vero , PRINCEPS EXCELLENTISSIMA , generoſæ tuæ indoli omnes adſcribant . Neque enim quidquam in me eſt, quod gratiam , ſtudiumque tuum mereatur ; ſed impense mihi faves tantum , ut ſingularem tui Animi magnitudinem factis impleres. Quod namque quatuor ab hinc annis opera mea utaris in diſciplinis addiſcendis ; id potius arcto vinculo me Tibi tenet obſtrictum . Primo ſiquidem eximiæ mihi gloriæ reputo , quod in præclaro hoc munere abſque ulla hæſitatione me aliis prætuliſti . Et deinde pri-

va-

vata noſtra ſtudia neſcio cui noſtrum magis hactenus profuere. Prætereo eum Animi cultum, quem tua familiaritate me comparaſſe, omnes agnoſcunt. Et ſilentio etiam committo illam rerum agendarum peritiam, quam conſuetudine tua ſenſim acquiſiviſſe, ingenue fateor. Plane vero reticere non debeo, quantum in ipſis illis diſciplinis profecerim, quibus Tibi eram adjumento. Ubi enim ad eas ediſcendas Animum appuliſti, non ea quidem Tibi Mens erat; leviter illas, ac curiose perluſtrare; ſed propoſitum Tibi fuit, tantum iis incumbere, quantum quiſque, vere ſciendi cupidus, iiſdem operam dabit. Hinc, ut tuis ego votis ex Animo ſatisfacerem, operæ pretium duxi, recolere eas artes, quibus a prima ætate deditus fui, ac denuo fere illas ediſcere. Quantum autem ex repetita iſta meditatione ego hauſerim fructus, ac emolumenti; Nemo certe non intelligit. Quod ſi dixerim, me eaſdem diſciplinas rurſus didiciſſe, ubi pro injuncto mihi munere Tibi illas enodabam; nihil plane dixero, quod a vero ſit alienum. Eo enim es acri judicio, tantamque habes a Natura Mentis Ἀκρίβειαν, ut lectionibus iis ediſcere ſimul, ac edocere videreris. Non itaque verebor, Princeps Excellentissima, obſignatis hiſce tabulis, candide profite-

ri , tantam eſſe beneficiorum molem, quæ hactenus a Te, non tam expreſſi, quam accepi, ut iis perſolvendis omnino impar exiſtam. Sed ea eſt Animi tui magnitudo, ut non minus inſpicias, quid vires poſſint aliorum, quam quid meritis tuis debeatur. Unde, non tam de eo dolendum mihi eſt, quam quod nec item hæroicas tui Animi dotes, eximias omnibuſque ſpectatas virtutes valeam pro dignitate pertexere. Etſi enim Nemini concedam, ut majore eas obſervantia colat, veneretur que; attamen, ut ſummorum in me meritorum magnitudinem ſuſtinere non poſſum, ſic nec ulla mihi concinna videtur oratio, quæ iis, ut par eſt, commendandis ſufficere queat. Illa namque gravitati adſperſa comitas, ac humanitas; ea Animi magnitudo, cum tanta moderatione conjuncta; ſumma illa in rebus agendis prudentia, ac fortitudo; omnium denique virtutum concordia, nullo vitiorum confinio polluta: plane ſupra omnem commendationem aſſurgunt, nec quiſquam, utut diſertiſſimus Orator, oratione ulla unquam complectetur. At ex altera parte gaudeo, lætorque vehementer, quod eximias tuas laudes, præclaras tui Animi dotes, nequeam, ut velim, verbis æquare. Nam, etſi eſſet in me tanta dicendi copia, atque

fa-

facultas , quæ iis celebrandis ſufficere poſſet ; adhuc tamen moderatio tua ſtylo manus injiceret , nec minus conſiderandum mihi eſſet , quid tuæ aures pati poſſunt , quam quid virtutes tuæ requirunt . Tantum itaque , PRINCEPS EXCELLENTISSIMA , publico iſto teſtimonio, benignitati tuæ , tuæque erga me benevolentiæ gratias ago permaximas ; nec alia ſunt mea vota , meæque obſecrationes , quam , ut Te diu , & mihi , & omnibus Deus ſervet incolumen . Vale.

EXCELLENTIÆ TUÆ

Addictiſſimus Famulus
Nicolaus de Martino.

AD
LECTOREM.

Ovennium eſt, & quod excurrit, ex quo in commodum, & uſum ſtudioſæ noſtræ Juventutis nova ſectionum conicarum Elementa edere mihi propoſui. Nam, ſicuti experientia noveram, libros conicorum Apollonii non leve negotium Tironibus faceſſere; ſic Elementa alia, ab aliis elucubrata, nec etiam numeris omnibus abſoluta mihi videbantur.

Sed quod ab eo uſque tempore mihi fuit in votis, nunc tandem, Benevole Lector, *exequi licuit; & fortaſſe diutius delata res eſſet, niſi ad ea conſcribenda fato quodam ſpeciali fuiſſem avocatus. Conſcripſi vero illa methodo etiam nova, & plane ſingulari. Neque enim, ut vulgo fit, propoſitionibus, ſcholiis, & corollariis res in iis edocentur; ſed continuo, & non interrupto ſermone cuncta demonſtrantur.*

Viſum eſt autem, nova iſta Elementa in octo libros partiri. In eorum primo agimus de ortu, & natura ſectionum conicarum. Quem in finem primo quidem oſtendimus, qua ratione conus oriatur, & quot modis plano ſecari queat. Tum geneſim proſequimur earum curvarum, quæ coni ſectiones dicuntur. Ad hæc docemus, quæ recta dicatur ſectionis diameter, quæve item ſint diametri vertices, ordinatæ, & abſciſſæ. Ac denique

pro-

propriam cujuſque ſectionis naturam relatè ad diametrum aperimus.

In ſecundo libro agendum aggredimur de deſcriptione ſectionum conicarum in plano. Et quoniam eas non aliter Veteres in plano deſcribebant, quam cono rurſus adhibito; oſtendimus primo loco, qua ratione conicæ ſectiones in plano per conum deſcribantur. Quamque Recentiores eaſdem curvas, nullius ſolidi ope, per ſolas linearum longitudines deſcribunt; ſubnectimus deinde, quo pacto eædem coni ſectiones poſſint per rectas ſolas in plano deſcribi.

Sequitur liber tertius, in quo de conicarum ſectionum diametris aliis ſermonem inſtituimus. Has methodo plane nova independenter a tangentibus definire conamur. Ac primo quidem earum determinationem pro qualibet ſectione in medium afferimus. Tum proprietates proſequimur, quæ communes ſunt diametris omnibus cujuſque ſectionis. Et agentes hoc loco de conjugatis diametrorum hyperbolæ; curvarum, ad quas eæ terminantur, naturam oſtendimus.

Librum tertium excipit quartus, qui eſt de mutua diametrorum, parametrorumque comparatione. In eo autem primo quidem comparamus inter ſe mutuo diametros omnes cujuſque ſectionis. Tum parametros earundem diametrorum inter ſe mutuo conferimus. Et quoniam, tam circa diametros, quam circa parametros plura poſſunt elegantia problemata inſtitui; viſum eſt, horum ſolutionem poſtremo loco ſubjungere.

In quinto libro diſſerimus de tangentibus,

bus, & ſecantibus ſectionum conicarum. Ac primo quidem proprietates oſtendimus, quæ competunt tangentibus cujuſque ſectionis. Deinde eas proſequimur, quæ pertinent ad ſecantes earundem ſectionum. Et quoniam aſymptoti hyperbolæ conſiderari poſſunt, veluti rectæ, quæ eam contingunt in punctis extremis, ſeu infinite a centro diſtantibus; oſtendimus etiam hoc loco proprietates, quæ hyperbolæ aſymptotis competunt.

In ſexto libro agendum nobis proponimus de focis, ſeu umbilicis ſectionum conicarum. Proprietates autem, quæ competunt ſectionibus conicis relate ad focos, ſeu umbilicos, ſunt duplicis generis: aliæ nimirum generales, & aliæ ſpeciales. Hinc primo quidem focorum cujuſque conicæ ſectionis proprietates generales oſtendimus. Tum deinde eas demonſtramus, quæ ſpeciales ſunt, & relate ad directricem locum ſibi vindicant.

Septimus porro liber eſt de locis geometricis, coni ſectionibus terminatis. Primo autem docemus, quid veniat nomine loci geometrici, & quot ejus ſpecies diſtinguantur. Deinde diviſionem tradimus locorum ad lineam, & oſtendimus quomodo ea conſtrui poſſint. Ac denique, quia ratio conſtruendi hujuſmodi loca eſt duplex, utraque ratione conſtructionem explicamus locorum, quæ coni ſectionibus terminantur.

Octavus, & ultimus liber eſt de conſtructione problematum ſolidorum. Pro ea vero rectius intelligenda, oſtendimus primo loco, tum generatim rationem conſtruendi problemata geometrica, cum ſpeciatim methodum

con-

conſtruendi problemata plana. His autem prælibatis, ipſam ſolidorum problematum conſtructionem explicandam aggredimur.

Cæterum, etſi a recepta Geometrarum methodo recedere viſum ſit; ſedulo tamen ſtuduimus, ut ubique claritas eluceret. Interim ab æquo Lectore illud poſtulamus, ut horum Elementorum lectionem non prius aggrediatur, quam ubi priores ſex libros Euclidis recte didicerit. Sed aliquam ſolidorum cognitionem ab eo etiam expoſcimus. Unde, priuſquam operi manum admoveat, non male ſe geret, ſi undecimum Euclidis librum evolvat, ubi de planorum ſectione diſſeritur.

Quæ vero ex doctrina ſolidorum Lectori noſtro potiſſimum perſpecta eſſe debent, ac explorata, ad hæc quatuor fere reducuntur. Primum eſt, quod, quemadmodum duæ lineæ in unico puncto ſe ſecant; ſic duarum ſuperficierum interſectio fiat in unica linea: quæ recta erit, ubi ipſæ ſuperficies, ſeſe invicem ſecantes, fuerint plana.

Alterum eſt, quod ſi recta una ſit perpendicularis duabus aliis rectis, in plano aliquo exiſtentibus; ea ad ipſum planum pariter perpendicularis eſſe debeat; adeoque normaliter inſiſtet omnibus aliis rectis, quæ in plano illo duci poſſunt.

Tertium eſt, quod ſi duo plana, ſe invicem ſecantia, recta fuerint ad tertium; communis eorum interſectio debeat eſſe perpendicularis ad utramque earum rectarum, in quibus illa eadem duo plana cum plano tertio ſe ſecant.

Et quartum denique eſt, quod ſi recta, in

pla-

plano aliquo exiſtens, perpendicularis fuerit ad communem ejus plani cum plano altero ſectionem; non aliter ipſa plana recta ad invicem eſſe queant, quam, ſi eadem illa recta ſubjecto plano normaliter inſiſtat.

Ex doctrina itaque ſolidorum hæc quatuor potiſſimum noſſe oportet, ut noſtra iſta ſectionum conicarum Elementa recte intelligi poſſint. Et opportunum duximus, ea hic Lectori exhibere; tum, ut illa continuo ante oculos habeat; tum etiam, ut ſciat, quid ipſi ex doctrina illa ſupponere opus ſit, ſi priores ſex libros Euclidis tantum evolverit.

Ex prioribus autem ſex libris Euclidis in primis præ manibus haberi debet doctrina proportionum, quorſum Matheſis omnis revocatur. Quem in finem Lectorem monitum volumus, quod, ut brevitati ſtuderemus, præter Euclideas arguendi rationes, pluribus aliis uſi ſumus, quas, ut facile quidem erit, ex prioribus eruere, ſic juvat in anteceſſum cognitas, ac exploratas habere.

Nimirum primo, quemadmodum per compoſitionem rationis confertur ſumma antecedentis, & conſequentis cum ipſo conſequente; ſic licebit, eandem ſummam conferre pariter cum antecedente, vel etiam ipſum antecedentem cum ſumma illa comparare.

Secundo, ſicuti per diviſionem rationis confertur exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, cum ipſo conſequente; ſic poterit idem exceſſus conferri pariter cum antecedente: perinde, ac per converſionem rationis ipſe antecedens cum exceſſu illo comparatur.

Ter-

Tertio, ſi antecedens rationis minor fuerit conſequente; licebit, exceſſum, quo viciſſim conſequens ſuperat antecedentem, conferre, tam cum conſequente, quam cum ipſo antecedente. Nec quicquam obſtabit, quominus ipſe antecedens cum exceſſu illo pariter conferatur.

Denique, ſi duæ rationes fuerint æquales; erit cuique illarum pariter æqualis, tum ea, quæ oritur, addendo ſimul antecedentes, & conſequentes; tum illa, quæ naſcitur per mutuam antecedentium, & conſequentium ſubductionem.

Familiaris etiam Lectori eſſe debet doctrina rationis compoſitæ; ac potiſſimum ante oculos habendum eſt theorema illud, quod ſi plures fuerint magnitudines, ratio primæ ad ultimam componatur ex rationibus primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, ſicque deinceps, uſque donec ad ultimam perveniatur.

Sane hoc theorema aſſumitur ab Euclide in ſuis Elementis abſque ulla demonſtratione. Ubi enim oſtendendum ſibi proponit, parallelogramma æquiangula habere rationem, ex lateribus compoſitam; utitur quidem eo theoremate, ſed non aliud laudat, quam definitionem compoſitæ rationis, his verbis conceptam: Ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componi dicitur, quando iſtarum quantitates multiplicatæ efficiunt quantitatem illius.

Inde vero nolim, carpere Euclidem, quod doctrinam compoſitæ rationis mancam nobis exhibuerit. Crediderim potius, deſiderari in

ejus

ejus Elementis definitionem aliam, quæ explicet nobis, quid per quantitatem rationis intelligi debeat. Nam, poſita definitione iſta, nemo non videt, præfati theorematis veritatem extra omne dubium illico poni.

Non fuiſſe autem omiſſam ab Euclide iſtiuſmodi definitionem, ſed tantum temporis injuria deperditam eſſe; vel exinde conjicere licet, quod abſque ea nec item rationis compoſitæ definitio intelligi queat. Quomodo vero definita fuerit ab Euclide in ſexto libro ſuorum Elementorum quantitas rationis; id ſane omnino nos latet, & crediderim, non ita facile poſſe divinari.

Ut enim doctrinam proportionum, per æquemultiplices oſtenſam, nobis exhibuit, poſuitque, duas rationes æquales eſſe inter ſe, hoc eſt eandem quantitatem habere, ubi antecedentium æquemultiplices, vel una ſuperant, vel una deficiunt, vel una adæquant æquemultiplices conſequentium; ſic ſane iiſdem multiplicibus adhibitis definienda quoque erat quantitas cujuſque rationis.

Verum quo pacto, ope multiplicium, rationis quantitas definienda ſit; id plane non video. An non igitur neglecta Euclidæa de quantitate rationis definitio, quia nimis ardua, ac difficilis, non omnium captui erat accomodata? Neque enim novum eſt, ut negligant Interpretes, quod non ſatis aſſequi poſſunt.

ELE-

ELEMENTA
SECTIONUM CONICARUM

INTRODUCTIO.

Quum primum ex humanioribus litteris ad arduum Philoſophiæ ſtudium animum appuliſti ; Ipſe ego, FAUSTINA PRINCEPS, auctor Tibi fui, ut planæ, ſolidæque Geometriæ Elementis illud præmunires . Jam iis cum fructu perluſtratis , non inanem Te operam ponere reor , ſi Geometriæ ſublimiori, quæ de conicis ſectionibus agit, nonnihil incumbas. Et quamquam non dubitem , quin ipſa Apollonii lectione eam addiſcere valeas ; conſultius tamen exiſtimo , in Tui commodum , & uſum nova illius Elementa conſcribere ,

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Noſti, Geometriæ ſcopum eſſe *ſolutionem problematum, quæ circa extenſionem inſtituuntur* . Sed hæc , ut non omnia ejuſdem ſpeciei ſunt , ita nec eadem ratione poſſunt omnia ſolvi. Quæ primo Veteribus ſe obtulere, *circuli, & rectæ* interſectione ab iis ſoluta fuerunt. Quumque lineæ iſtæ in plano ſuam originem trahant , *plana* etiam illiuſmodi problemata vocitarunt . Sed alia deinceps iiſdem oblata, quorum ſolutionem earum linearum ope *fruſtra* tentarunt . Unde ad curvas alias excogi-

Digitized by Google

tandas, quibus iis ſatisfieri poſſet, animum converterunt.

Quas primo Veteres conſiderarunt, ſunt *conicæ ſectiones*, hoc eſt eæ, quæ ex coni per planum ſectione oriuntur. Sed fieri fortaſſe potuit, ut eo fuerint manuducti *natura ipſa* eorum problematum, quæ primo norunt circulum reſpuere. Nam, ſicuti conſtat, problemata iſta fuiſſe *duplicationem cubi*, & *anguli triſectionem*; ita explorata res eſt, utrumque horum problematum *natura ſua* ad conicas ſectiones pertinere. Utut vero fuerit, problemata, quæ per eas ſolvuntur, vocarunt *ſolida*; quia lineæ, iis inſervientes, ex ſolido ducunt originem ſuam.

Poſt conicas ſectiones plures alias curvas Veteres excogitarunt: & problemata, quorum conſtructioni eas adhibebant, vocarunt *linearia*. Sed extitere nonnulli, qui poſthabitis coni ſectionibus, utebantur curvis illis etiam in conſtructione problematum ſolidorum. Verum, ut ex Pappo diſcimus, ad id non aliud eos adegit, quam quia tunc temporis *difficile erat coni ſectiones in plano deſcribere*. Unde ætate noſtra, qua deſcriptio earum curvarum in plano nullam difficultatem patitur, piaculum foret, ſimile quidpiam moliri.

Qui primus inter Veteres in conicarum ſectionum contemplationem devenerit, non ſatis liquet. Sed, ſi qua fides Pappo, conſcripſit de iis quatuor libros Euclides, quos quum expleviſſet Apollonius Pergæus, alioſque totidem adjeciſſet, octo conicorum libri

con-

confecti. Ex his libris poſteriores quatuor dumtaxat *ad abundantiorem ſcientiam* pertinebant. Et inde factum reor, ut græcum eorum exemplar ad nos uſque non pervenerit. Enimvero iſtarum rerum ſtudioſi ſolos quatuor priores, *diſciplinæ elementa* continentes, evolvebant.

Probabile eſt autem, non eodem tempore libros quatuor poſteriores intercidiſſe. Nam verſiones arabicæ, quæ extant, ſeptem priorum, argumento nobis eſſe poſſunt, octavum librum fuiſſe primo deperditum. Ex una harum verſionum in epitomen redacta excerpſit Borellus noſter libros quintum, ſextum, & ſeptimum, quos latine redditos, ſuiſque commentariis illuſtratos in lucem emiſit. Sed eoſdem, adhibitis verſionibus aliis, edidit quoque Edmundus Hallejus, quibus tum quatuor priores græce latineque, cum octavum proprio marte reſtitutum adjunxit.

Cæterum Apollonius inter ipſos Græcos quamplures habuit Commentatores. Præcipui vero fuerunt Pappus, & Eutocius, quorum prior lemmata in ſingulos libros, alter commentarios in difficiliora loca conſcripſit. Et iſtius quidem commentarii, quum in ipſo conicorum opere legerentur, mutili etiam ad nos pervenerunt. Sed Pappi lemmata nullum detrimentum injuria temporis paſſa ſunt. Nam ea in ſuis collectionibus ipſe Pappus inſeruit, quarum etſi priores duo libri non amplius extent, extat tamen liber ſeptimus, in quo illa ab Auctore ſuo inſerta fuerunt.

E Græcis Apollonius confluxit ad Ara-

bes, a quibus & ſcholiis illuſtratus, & contractus etiam in epitomen. Tum Italos convenit, qui etſi eum poſtremis quatuor libris truncatum exceperint, in ejus tamen doctrina adeo profecerunt, ut non defuerit inter eos, qui libros quintum, & ſextum propriis viribus reſtituerit. Denique per omnes Europæ regiones migravit, & ubique viros ingenio, doctrinaque præſtantes comperit, qui illuſtrationi ejus certatim operam navarunt.

Verum, etſi Apollonius omni tempore fuerit excultus, & plerique ejus doctrinam nova etiam methodo enucleatam exhibuerint; adhuc tamen talia ſuorum conicorum Elementa deſiderantur, quæ tironibus proficua eſſe poſſint, & doctis etiam non improbentur. Hanc ego provinciam exornandam mihi propoſui, ex quo primum agnovi neceſſitatem iſtiuſmodi Elementorum. Sed quæ in Tui commodum, & uſum, Princeps Excellentissma, conſcribere decrevi, audacter ſe ſpes inſinuat, poſſe eorum munus obire.

In iis autem conſcribendis methodo utar plane ſingulari. Neque enim, ut paſſim fieri ſolet, propoſitionibus, ſcholiis, & corollariis Te detinebo; ſed continuo, & non interrupto ſermone tuis oculis cuncta ſubjiciam. Non inficior, hoc pacto paulo loquaciorem me eſſe oportere. Sed, quando ei medebor ſterilitati, quam recepta Geometrarum methodus parit; nemo opinor erit, qui laxiorem illam ſcribendi rationem mihi vitio vertet.

LI-

LIBER I.

De Ortu, & Natura Sectionum Conicarum.

RErum veritatem nulli alii melius aſſequuntur, quam qui eas ab initio naſcentes inſpiciunt. Hinc, acturi de ſectionibus conicis, earum primo ortum oportet contemplemur. Poſſunt autem hujuſmodi curvæ variis, multiſque modis oriri. Sed, ut jam dictum eſt, placuit Veteribus, eas eruere ex ſectione coni facta per planum. Unde, illorum exemplo, primam earum originem nos etiam ex cono deducemus.

CAP. I.

Qua ratione oritur conus, & quot modis plano ſecari poteſt.

I. UT origo conicarum ſectionum ex cono rectius intelligatur, oſtendenda eſt prius geneſis illius ſolidi, quod *conus* appellatur. Sane Euclides in ſuis Elementis eam univerſaliter non tradidit. Nam voluit oriri conum, *quando rectanguli trianguli manente uno crurum, circumducitur crus alte-* I.

I. De geneſi, & ſpeciebus coni; tum item de conis oppoſitis.

rum, *donec redeat ad priorem locum*.

Primus Apollonius ad ſuam univerſalitatem illam evexit. Enim vero docuit conum oriri, *quando recta, ex ſublimi, ac manente puncto ad circuli circumferentiam demiſſa, eam integre percurrit*. Qua ratione, præter conum euclidæum, quem vocavit *rectum*, adeptus eſt conum alium, quem *obliquum*, ſeu *ſcalenum* appellavit.

Recta ſiquidem, quæ ſublime punctum cum centro circuli conjungit, poteſt cum plano hujus, tam rectos, quam obliquos angulos conſtituere. Itaque, quum ei inſiſtit ad rectos angulos, conus dicendus eſt *rectus*; ubi vero inſiſtit ad angulos obliquos, *obliquus*, ſeu *ſcalenus* conus ipſe vocandus.

In utroque autem cono recta illa, quæ conjungit ſublime punctum cum centro circuli, dicitur *axis* ipſius coni. Et ſicuti punctum illud ſublime, quod in coni generatione manet fixum, & immotum, vocatur *vertex*; ſic & planum ipſius circuli *baſis* nomine inſignitur.

Utrumque etiam conum liquet *in infinitum* augeri, ſi recta, quæ ex ſublimi puncto ad circuli circumferentiam ducitur, producatur inferius in infinitum. Sed, ſi eadem recta extendatur quoque *ſuperius*; tunc deſcribetur conus alter, cujus idem erit vertex, idemque pariter axis cum cono priore.

Duos hoſce conos, quum nobis uſui erunt, vocabimus *oppoſitos*. Sed notetur ſedulo velim, quod ut tali nomine duo coni deſignentur, haud quidem ſatis ſit, eos eundem

ver-

verticem, eundemque axim habere; ſed neceſſe eſt quoque, ut per eandem rectam ambo deſcribantur.

II. *De poſitione rectæ, conjungentis ſuperficiei conicæ puncta duo.*

II. Ex ipſa autem coni generatione ultro ſequitur, *rectam, conjungentem duo puncta ſuperficiei conicæ, eſſe in ipſa ſuperficie, quum producta tranſit per verticem; & cadere intra ſuperficiem, ubi ad verticem non pertinet.*

Eſto etenim conus ABC, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD. Capiantur in ejus ſuperficie duo puncta F, & G, quæ jungantur per rectam FG. Dico, rectam iſtam eſſe in ſuperficie conica, quum tranſit producta per verticem A; & cadere intra ſuperficiem, quum non pertinet ad verticem. FIG. 1. 2.

Si enim fieri poteſt, recta FG cadat in primo caſu, vel intra, vel extra ſuperficiem conicam. Et quoniam recta, quæ eam ſuperficiem deſcribit, revolutione ſua tranſit per omnia puncta ejus; tranſibit quoque per punctum F. Quare duarum rectarum erunt iidem termini: quod fieri non poteſt. FIG. 1.

In ſecundo autem caſu jungantur rectæ AF, AG, quæ quum ſint in ſuperficie conica, eædem productæ occurrent circumferentiæ baſis in duobus punctis B, & C. Quare, quum recta BC ſit intra circulum, erit triangulum BAC intra conicam ſuperficiem. Eſt autem recta FG in plano trianguli BAC. Et igitur eadem recta FG intra conicam ſuperficiem erit. FIG. 2.

III. *De duplici plano conum ſecandi ratione.*

III. Jam conus plano bifariam ſecari poteſt, primo nempe per verticem, & deinde

per alium a vertice locum. Quum *conus ſecatur plano per verticem, fient in ejus ſuperficie binæ lineæ rectæ*. Quotieſcumque vero *planum ſecans per verticem non tranſit, tunc ſectio facta in ſuperficie coni curva linea erit*.

FIG. 2. Ut hæc oſtendantur, ſit rurſus conus ABC, qui ſecetur primo plano, tranſeunte per verticem. Et jam, ſi planum iſtud occurrat circumferentiæ baſis in punctis B, & C; junctis rectis AB, AC, erunt iſtæ in plano ſecante. Sed eædem, quum ad verticem pertineant, ſunt etiam in ſuperficie conica. Quare erunt communes ſectiones plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei: proindeque, ſecto cono plano per verticem, fient in ejus ſuperficie binæ lineæ rectæ.

Secetur ſecundo conus ABC plano, non tranſeunte per verticem; ſitque FGH communis ſectio plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei. Si fieri poteſt, ſit vel ipſa, vel aliqua ejus portio recta, & non curva. Et quoniam ea exiſtit in plano ſecante, quod per verticem non tranſit; utique nec etiam ipſa pertinebit ad verticem. Itaque cadet intra ſuperficiem conicam; nec ideo erit communis ſectio plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei: quod eſt contra hypotheſim.

IV. *De ſectione coni, quæ fit plano per verticem.*

IV. Quemadmodum autem, quum conus plano per verticem ſecatur, fiunt in ejus ſuperficie binæ lineæ rectæ; ita *communis ſectio coni cum plano, per verticem tranſeunte, triangulum erit*.

FIG. 2. Secetur ſiquidem conus ABC plano, per verticem tranſeunte; ſintque AB, AC binæ li-

neæ

neæ rectæ, quæ fiunt in ejus ſuperficie. Et quoniam planum ſecans occurrit plano baſis in recta BC, liquet BAC triangulum eſſe. Eſt autem BAC communis ſectio coni cum plano. Itaque, quum conus ſecatur plano, tranſeunte per verticem, ſectio facta in cono triangulum erit.

Si planum, per quod diſpeſcitur conus, tranſeat quoque per axem; tunc recta, in qua illud occurrit plano baſis, erit iſtius diameter aliqua: proindeque triangulum per axem ſectum ſuper aliqua baſis diametro ſemper inſiſtet.

Viciſſim autem, ſi triangulum ex cono ſectum inſiſtat ſuper aliqua baſis diametro, planum ejus tranſibit per axem. Nam aliter, ducta in eo plano recta a vertice coni ad centrum baſis, forent hujus, & axis iidem termini: quod plane repugnat.

V. *De ſectione coni, quæ fit plano æquidiſtante baſi.*

V. Planum porro conum ſecans, quum non tranſit per verticem, vel occurrit plano baſis, vel ei æquidiſtat. Quum *ſecatur conus plano, æquidiſtante baſi, ſectio circulus fiet.* Nec alterius naturæ erit, ſi non ipſe conus principalis, ſed ejus oppoſitus ea plani poſitione ſecetur.

Sit enim conus ABC, & vel ipſe, vel ejus oppoſitus ſecetur plano, æquidiſtante plano baſis BCD. Sit autem FGH communis ſectio coni cum plano. Dico, ſectionem iſtam circulum eſſe, ejuſque centrum reperiri in axe coni AK. FIG. 2.

Ducatur per axem planum aliud, faciens triangulum BAC. Et jam communes ſectiones

ejus

ejus cum planis æquidiſtantibus, nimirum rectæ BC, FG, parallelæ erunt inter ſe. Atque ita quoque, ducto per axem alio quovis plano DAK, parallelæ erunt rectæ DK, HL.

Hinc, quum ſit, ut AK ad AL, ita BK ad FL; ita CK ad GL, & ita DK ad HL; erunt rectæ BK; CK, DK proportionales rectis FL, GL, HL; adeoque, ſicuti BK, CK, DK inter ſe ſunt æquales, ſic etiam æquales erunt FL, GL, HL.

Similiter autem oſtendemus, æquales inter ſe eſſe rectas omnes, quæ in ſectione FGH pertinent ad punctum L. Quare ſectio ipſa FGH circulus erit, ejuſque centrum erit punctum L, quod reperitur in axe coni AK.

Id quum ita ſit, liquet, planum baſi æquidiſtans, non tam conum ſecare, quam illum reſtituere. Nam ea portio coni, quæ ad verticem pertinet, quum circulum pro baſi habeat, adhuc conus vocari debet.

VI. *De ſectione coni, quæ fit plano occurrente baſi.*

VI. Quod ſi planum ſecans occurrit plano baſis, tunc duo quidem contingere poſſunt. Nam, producto plano una cum cono, vel rurſus planum ex cono egreditur, vel ſemper jacet intra eum. In primo caſu curva, quæ gignitur in conica ſuperficie, redibit in orbem, & ſpatium claudet. In ſecundo autem caſu curva, quæ ibidem producitur, abibit in infinitum cum ipſo cono.

Sed, plano intra conum continuo jacente, duo adhuc caſus ſunt diſtinguendi. Nam, producto plano ſuperius, vel ſecatur quoque conus oppoſitus, vel ei nequaquam occurritur. Quum primum contingit, in utriuſque coni ſu-

ſuperficie producitur curva, quæ in infinitum extenditur. Ubi vero alterum accidit, dumtaxat in ſuperficie coni principalis curva, in infinitum progrediens, generatur.

Jam curva, quæ abit in infinitum, quum nullam aliam in adverſo cono oppoſitam habet, vocabitur *parabola*. Sed, quum ei in cono oppoſito alia adverſatur, tam ipſa, quam ejus adverſa dicetur *hyperbola*. Et denique curva illa, quæ redit in orbem, quæque producitur plano, utrinque ex cono egrediente, ſi circuli circumferentia non ſit, *ellipſis* appellabitur.

Eſt autem circumferentia circuli in unico tantum caſu; qui obtinet etiam in ſolo cono ſcaleno. Agnovit hunc caſum ipſe coni ſcaleni auctor Apollonius; & ſectionem, per quam ei fit locus, vocavit *ſubcontrarium*. Habetur vero iſtiuſmodi ſectio, quum tam ejus planum, quam planum baſis triangulo per axem ſecto normale eſt, ex quo etiam triangula ſimilia a planis illis abſcinduntur.

VII. Et ſane, quod *ſectio coni ſcaleni ſubcontraria ſit circulus*, demonſtratur in hunc modum. Coni ſcaleni ABC ſit FGH ſectio ſubcontraria, ſitque BAC triangulum per axem ſectum, cui normale eſt, tam planum baſis BCD, quam planum ſectionis FGH. Et quoniam triangula ABC, AGF, quæ ex eo per plana iſta abſcinduntur, ut dictum eſt, debent eſſe ſimilia inter ſe; erit angulus AFG æqualis angulo ACB. VII. *De ſectione coni ſcaleni ſubcontraria.* FIG. 3.

Sumatur in recta FG, quæ communis eſt ſectio planorum BAC, FGH, punctum aliquod

L, per

L, per quod agatur, tum recta MN ipſi BC parallela, cum planum MNH æquidiſtans plano baſis BCD. Sit autem HL communis ſectio planorum FGH, MNH, quæ perpendicularis erit utrique rectarum FG, MN; quum utrumque eorum planorum plano trianguli BAC normale ſit.

Quoniam igitur rectæ BC, MN inter ſe ſunt parallelæ; erit angulus ACB æqualis angulo ANM. Sed angulo ACB æqualis eſt angulus AFG. Quare duo anguli AFG, ANM æquales erunt inter ſe: & propterea, quum ſit, ut FL ad ML, ita NL ad GL; erit rectangulum FLG æquale rectangulo MLN.

Ulterius, quia ſectio MNH eſt circulus, & diametro ejus MN ducta eſt perpendicularis HL; erit quadratum ex HL æquale rectangulo MLN. Sed rectangula duo MLN, FLG oſtenſa ſunt æqualia inter ſe. Quare idem HL quadratum erit etiam æquale rectangulo FLG.

Similiter autem oſtendemus, omnem aliam rectam, quæ in ſectione FGH perpendiculariter demittitur ipſi FG, poſſe rectangulum, ſub ejuſdem FG ſegmentis comprehenſum. Et igitur ex notiſſima circuli proprietate ſectio ipſa FGH circulus erit.

VIII. *Ex qua coni ſectione oriri circulus poteſt.*

VIII. Quod autem, *præter ſectionem parallelam, & ſubcontrariam, nulla alia circulum exhibeat in cono*, demonſtratur hoc pacto. In cono ABC fiat ſectio FGH, quæ neque ſit baſi parallela, neque eidem ſubcontraria. Et, ſi fieri poteſt, ſit ea circulus.

FIG. 4. Eſto MN communis ſectio planorum

FGH,

FGH, BCD, ad quam per centrum circuli FGH perpendicularis demittatur FM. Tum per rectam FM, & per verticem coni agatur planum aliud, occurrens plano baſis in recta BM. Denique per eundem verticem aliud adhuc planum ducatur, ipſi MN æquidiſtans, cujus communis ſectio cum cono ſit triangulum DAE.

Quoniam igitur planum trianguli DAE ductum eſt rectæ MN æquidiſtanter; communes ejus ſectiones cum planis circulorum BCD, FGH, hoc eſt rectæ DE, HI, erunt tum ipſi MN, cum inter ſe adhuc parallelæ. Unde, ſicuti HI, velut diametro FG perpendicularis, biſecta eſt in L; ita quoque DE biſecabitur in K.

Simili ratione oſtendemus, biſecari a recta BC quamcumque aliam, quæ in circulo BCD ducitur ipſi MN æquidiſtanter. Quare recta BC erit diameter circuli BCD; & conſequenter planum ABM tranſibit per axem ipſius coni; eritque adeo triangulum BAC ex cono ſectum per axem.

Ulterius, quum recta BC ſit diameter circuli BCD, ea non modo bifariam, verum etiam ad rectos angulos ſecabit aliam DE. Eſt autem DE parallela ipſi MN. Quare huic MN normalis erit utraque ipſarum FM, BM: proindeque triangulum per axem ſectum BAC rectum erit ad baſim BCD; & propter parallelas MN, HI, erit pariter rectum ad planum ſectionis FGH.

Denique per punctum K ducatur recta OR ipſi FG parallela. Et quoniam in eadem

ra-

ratione rectarum AK, AL eſt, tum OK ad FL, cum RK ad GL; erit rectangulum OKR ad rectangulum FLG, ut eſt AK quadratum ad AL quadratum. Sed AK quadratum eſt ad AL quadratum, ut DK quadratum ad HL quadratum; ſive etiam, propter circulos BCD, FGH, ut rectangulum BKC ad idem rectangulum FLG. Quare erit rectangulum OKR æquale rectangulo BKC.

Hinc, quum ſit, ut OK ad BK, ita CK ad RK; erit angulus OBK æqualis angulo GRK, ſive AGL; atque adeo triangulum ABC ſimile erit triangulo AGF. Unde, quum triangulo per axem ſecto BAC rectum ſit, tam planum baſis BCD, quam planum ſectionis FGH; & ex eo inſuper per plana iſta abſcindantur triangula ſimilia ABC, AGF: ſectio FGH ſubcontraria erit: quod eſt contra hypotheſim.

C A P. II.

Quæ curvæ ſectionum conicarum nomine veniunt, & quæ ſit earum origo.

I. *Epilogus eorum, quæ præcedenti capite oſtenſa ſunt.*

I. IN præcedenti capite, poſt traditam coni generationem, expoſiti ſunt modi omnes, quibus plano conus ſecari poteſt. Et vidimus, quod ſicuti, ſecto cono plano per verticem, fiunt in ejus ſuperficie bi-

næ

næ lineæ rectæ; ita, quum conus ſecatur plano, per verticem non tranſeunte, ſectio orta in eadem ſuperficie ſit linea undique curva. Novimus porro, curvam iſtam eſſe circumferentiam circuli, quum ſectio, vel eſt baſi æquidiſtans, vel eidem ſubcontraria; eſſe vero alterius a circumferentia circuli naturæ, quum planum ſecans alia ratione ad planum baſis inclinatur.

Sed hanc aliam curvam, a circuli circumferentia diverſam, triplicis etiam ſpeciei eſſe poſſe, nobis innotuit. Nam, vel in orbem redit, ſpatiumq; comprehendit ad inſtar ipſius circuli circumferentiæ; & vocavimus eam *ellipſim*. Vel extenditur in infinitum, nullamque aliam in adverſo cono ſibi oppoſitam habet; & *parabolæ* ei nomen impoſuimus. Vel denique abit quidem in infinitum, ſed ei in oppoſito cono curva alia adverſatur; & tum ipſam, cum ejus adverſam *hyperbolæ* nomine deſignavimus.

II. Jam nomine *ſectionum conicarum* hujuſmodi tres curvas Veteres intelligebant. Circuli enim circumferentia, etſi ex cono etiam eruatur, eo tamen vocabulo minime ab iis fuit inſignita. Id vero non abſque conſilio factum a Veteribus reor: nimirum, ut ea ratione cunctis indicarent, non debere circumferentiam circuli ex cono deduci. Coni etenim geneſis, ut ſuperius vidimus, præexiſtentem circulum ſupponit. Unde, ſi circuli circumferentia ex cono eſſet deducenda, jam in eam impingeretur labem, quam vitioſum circulum vulgus appellat.

II. *Quæ curvæ veniunt nomine ſectionum conicarum.*

Qua

Qua autem ratione *parabola*, *hyperbola*, & *ellipſis* ex cono trahant originem ſuam, jam ſuperius innuimus. Nimirum oritur in cono *parabola*, quum planum, per quod diſpeſcitur conus, jacet ſemper intra conum, nec ſuperius productum conum ſecat adverſum. Oritur vero *hyperbola*, quum idem planum jacet quidem continuo intra conum, ſed ſurſum productum ſecat etiam conum oppoſitum, ubi *hyperbolam* aliam creat. Et denique oritur *ellipſis*, quum planum ſecans utrinque egreditur ex cono, ſed ſectio nec eſt baſi æquidiſtans, nec eidem ſubcontraria.

III. Euclidæa geneſis earum curvarum explicatur.

III. Interim Euclides, & Apollonius in eruendis curvis iſtis ex cono triangulum per axem ſectum velut *regulam* adhibebant. Sed rem non eadem ratione ambo expoſuerunt. Euclides ſiquidem, non aliter conum plano ſecabat, quam ut *uni laterum ejus trianguli ad rectos angulos occurreret*. Unde, quia dumtaxat conum rectum agnovit, in quo omnia triangula per axem ſecta ſunt iſoſcelia, & æquales in vertice angulos habent; ex uno, eodemque cono curvas illas omnes eruere nequibat, ſed pro unaquaque illarum peculiari quodam cono ei opus erat.

Nimirum, etſi conus euclidæus oriatur, quando rectanguli trianguli manente uno crurum, circumducitur crus alterum, uſque donec ad priorem ſuum locum revertatur; poſſunt tamen ejus coni tres *ſpecies* diſtingui, *prout crus manens eſt æquale, minus, vel majus crure circumducto*. Pro triplici enim hoc

ca-

caſu, triangulum, ſectum ex cono plano per axem, poteſt in vertice, tum rectum, tum obtuſum, tum acutum angulum habere. Unde, habita ejus anguli ratione, poterit ipſe conus, modo *rectangulus*, modo *obtuſangulus*, modo demum *acutangulus* appellari.

Ad eruendam ergo *parabolam*, utebatur Euclides cono *rectangulo*. Nam in eo triangulum, per axem ſectum, habet in vertice angulum rectum; adeoque planum, uni ejus lateri ad rectos angulos occurrens, jacebit ſemper intra conum, nec ſecabit ejus oppoſitum. Viciſſim autem, ad eruendam *hyperbolam*, adhibebat conum *obtuſangulum*; quia, ratione anguli obtuſi, in trianguli vertice exiſtentis, idem planum jacebit quidem continuo intra conum, ſed ſecabit ejus adverſum. Et denique, ad deducendam *ellipſim*, in ſubſidium advocabat conum *acutangulum*; quia, propter angulum acutum, exiſtentem in vertice trianguli, prædictum planum rurſus ex cono egredietur.

IV. Hæc igitur erat trium illarum curvarum euclidæa geneſis ex cono. Sed novit Apollonius, poſſe illiuſmodi curvas *indiſcriminatim* ex omni cono deduci, ſi planum, per quod diſpeſcitur conus, non ita duceretur, ut uni laterum trianguli, per axem ſecti, ad rectos angulos inſiſteret; ſed ſubinde, ut *occurreret plano baſis, aut alterius circuli paralleli in recta, quæ normalis eſſet ad baſim ejus trianguli*.

IV. *Oſtenditur earundem curvarum geneſis apolloniana.*

Sit itaque conus ABC, & in eo plano per axem fiat triangulum BAC. Secetur deinde idem conus plano alio, occurrente plano ba- FIG. 5. 6. 7.

ſis, aut alterius circuli paralleli BCD in recta DE, quæ perpendicularis ſit ad baſim ejus trianguli BC; ſitque DFE ſectio, facta in ſuperficie conica per hoc aliud planum. Oſtendendum eſt, ſectionem iſtam poſſe unamquamque earum curvarum nobis exhibere.

Sit recta FG communis ſectio planorum BAC, DFE. Hanc liquet eſſe poſſe; vel lateri AC parallelam; vel ſubinde ad illud inclinatam, ut ei ſupra coni verticem occurrat; vel demum taliter ad illud annuentem, ut infra coni verticem cum eo conveniat. In primo caſu ſectio DFE erit *parabola*; in ſecundo erit *hyperbola*; ac demum in tertio caſu eadem ſectio erit *ellipſis*.

Ut hæc oſtendantur, ducatur per latus AC planum, quod occurrat plano circuli BCD in recta CZ, ipſi DE parallela. Et quoniam recta DE poſita eſt perpendicularis ad diametrum circuli BC, erit recta CZ eidem BC ſimiliter perpendicularis. Continget ergo recta CZ circumferentiam circuli BCD in puncto C. Unde ipſum quoque planum tanget conicam ſuperficiem in latere AC; & productum ſuperius, continget etiam ſuperficiem oppoſiti coni, in quam latus AC, quum ſurſum producitur, cadit.

Jam, quum recta FG parallela eſt lateri AC; erit planum DFE æquidiſtans quoque plano contactus. Unde, ſicuti cum eo convenire non poteſt, ita jacebit ſemper intra conum, nec ſecabit ejus oppoſitum: proindeque ſectio DFE *parabola* erit. Quotieſcumque vero recta FG occurrit lateri AC ſupra verticem;

cem;

cem ; tunc planum DFE etiam ſupra verticem conveniet cum plano contactus : adeoque, quum ſecet conum oppoſitum, ſectio DFE erit *hyperbola*. Denique, quum recta FG occurrit lateri AC infra verticem ; planum DFE conveniet cum plano contactus ſimiliter infra verticem : proindeque, quum rurſus ex cono egrediatur, ſectio DFE erit *ellipſis*.

V. Verum quidem eſt, quod in ducendo plano ſectionis etiam Apollonius hanc legem adhibuerit, ut occurreret plano baſis, aut alterius circuli paralleli in recta, quæ normalis eſſet ad baſim trianguli, per axem ſecti. Nihilominus ad legem iſtam omnes, quæ in cono fiunt, ſectiones exigi poſſunt; quia, quomodocumque planum, per quod diſpeſcitur conus, occurrat plano baſis, aut alterius circuli paralleli, ſemper exhiberi poteſt in cono triangulum per axem, ad cujus baſim recta illius occurſus perpendiculariter inſiſtat.

V. *Apolloniana geneſis ſectionum conicarum nulla exceptione laborat.*

Secetur etenim conus ABC plano aliquo, occurrente plano baſis, aut alterius circuli paralleli BCD in recta DE. Jam nihil obſtat, quominus in circulo BCD talis diameter ducatur, quæ ipſi DE ad rectos angulos occurrat. Satis ſiquidem erit, ex centro ipſius circuli perpendicularem demittere ſuper DE, eamque producere, uſque donec utrinque circumferentiam ſecet. Sit igitur BC diameter iſta. Et triangulum, per axem ſectum, quod ei inſiſtit, illud erit, quod quæritur. Nam ex ipſa conſtructione baſi ejus BC perpendicularis eſt recta DE, in qua planum ſectionis DFE occurrit plano circuli BCD. FIG. 5. 6. 7.

Ratio igitur eruendi tres illas curvas ex cono, quam tradidit Apollonius, *nulla exceptione laborat*. Nam, ſicuti per eam præfatæ tres curvæ poſſunt ex quolibet cono deduci; ita omnis ſectio, quæ aliquam ex iis curvis in conica ſuperficie producit, velut ea ratione facta poteſt haberi. Unde etiam geneſis earum curvarum apolloniana, *univerſalitate ſua*, non modo euclidæam, ſed omnem aliam, quæ fingi excogitarique poteſt, vincit ac ſuperat; quandoquidem univerſaliſſima illa, a plani intra conum poſitione deducta, quam poſuimus ab initio, ad ipſam revocatur.

VI. *Euclidea methodo tres illa curva nec etiam ex eodem cono ſcaleno erui poſſunt.*

VI. Sed nolim hic reticere, quod juxta methodum euclidæam nec etiam ex uno, eodemque cono ſcaleno tres illæ curvæ erui queant. Etſi enim in cono iſto triangula, per axem ſecta, non habeant ſemper æquales angulos in vertice; ſunt tamen anguli illi ejuſdem ſemper ſpeciei inter ſe, hoc eſt, vel omnes recti, vel omnes obtuſi, vel omnes acuti. Unde, ſi planum ſecans uni laterum trianguli, per axem ſecti, ad rectos angulos occurrere deberet; adhuc alio cono opus eſſet ad eruendam parabolam, alio ad derivandam hyperbolam, & alio demum ad deducendam ellipſim.

Fig. 3. Sit enim conus ſcalenus ABC, ex quo abſcindatur plano per axem triangulum aliquod BAC. In plano hujus trianguli deſcribatur ſemicirculus, cujus diameter ſit recta BC. Et perſpicuum eſt, punctum A locari in ejus circumferentia, quum axis coni adæquat baſis ſemidiametrum; intra circumferentiam, quum axis coni eſt minor ſemidiametro baſis;

ac

ac demum extra circumferentiam, quum idem axis eſt major eadem ſemidiametro. Quare ipſius trianguli angulus verticalis erit rectus in primo caſu, obtuſus in ſecundo, tandemque acutus in tertio.

Hæc autem quum ita ſint, liquet, conum ſcalenum, perinde ac rectum, eſſe, vel *rectangulum*, vel *obtuſangulum*, vel denique *acutangulum*. Quotieſcumque enim axis coni ſcaleni baſis ſuæ ſemidiametrum adæquat, conus erit *rectangulus*; quia quodlibet triangulum, per axem ſectum, habet in vertice angulum rectum. Ubi vero axis coni ſcaleni eſt minor ſemidiametro baſis, conus erit *obtuſangulus*; quia in vertice cujuſque trianguli, per axem ſecti, reperitur angulus obtuſus. Et denique, quum axis coni ſcaleni eſt major ſemidiametro baſis, conus erit *acutangulus*: ob acutum angulum, quem triangula, per axem ſecta, in vertice habent.

VII. Sectionum conicarum nomina enucleata, & cur ab iis receſſerit Apollonius.

VII. Recte igitur obſervavit Eutocius, quod in tradenda geneſi earum curvarum contigerit Veteribus illud idem, quod evenit eis in ea trianguli proprietate, quod *omnes anguli ſimul duobus rectis ſint æquales*. Nam, ſicuti proprietatem iſtam primo norunt in triangulo æquilatero, tum in iſoſceli, ac poſtea in ſcaleno: unde demum conflatum ab iis univerſale theorema, omnes triangulorum ſpecies comprehendens; ita quoque tres illas curvas ex totidem coni recti ſpeciebus primum erucbant: & nonniſi poſt tempora Apollonii, tum ex quolibet cono recto, cum etiam ex cono ſcaleno eas deduxerunt.

Cæterum Apollonio, non modo univerſalis earum curvarum geneſis, ſed nomina quoque, quibus eas deſignamus, ferri debent accepta. Euclides enim ab ipſis conis, unde illas eruebat, primam vocavit *ſectionem coni rectanguli*, alteram *ſectionem coni obtuſanguli*, & tertiam demum *ſectionem coni acutanguli*: hiſque nominibus ad Apollonium uſque, cum Archimedes, tum alii ſubſecuti Geometræ curvas illas vocitarunt.

Sed nominibus iſtis non amplius a ſe mutuo poterant eæ curvæ diſtingui, ubi novit Apollonius, poſſe unamquamque illarum ex quocumque cono deduci. Unde, iis abdicatis, operæ pretium duxit Geometra ſummus, alia curvis illis nomina imponere, quæ apta eſſent iis a ſe invicem diſtinguendis. Itaque, a præcipuis ipſarum proprietatibus, quas ſuo loco inferius oſtendemus, *parabolam*, *hyperbolam*, *&* *ellipſim* eas appellavit.

C A P. III.

De diametro ſectionum conicarum, deq; ejus verticibus, ordinatis, & abſciſſis.

I. *Quæ recta diameter cujuſvis conicæ ſectionis appellatur.*

I. Cujuſcumque ſpeciei ſit ſectio conica, ſi fiat in cono triangulum illud per axem, ad quod eam apolloniana geneſis exigit, dicetur *diameter* ſectionis recta illa, quæ eſt communis ſectio ejus trianguli, & plani ſecantis. Ita,

Ita, ſi DFE ſit ſectio facta, in ſuperficie conica per planum, occurrens plano baſis, aut circuli æquidiſtantis BCD in recta DE; & BAC ſit triangulum, per axem ſectum, ad cujus baſim BC normalis eſt recta DE: vocabimus *diametrum* ſectionis DFE rectam FG, in qua duo plana BAC, DFE ſeſe mutuo ſecant. Fig. 5. 6. 7.

Jam vidimus præcedenti capite, rectam iſtam FG eſſe lateri AC parallelam, quum ſectio DFE eſt parabola; ei occurrere ſupra verticem coni, quum ſectio DFE eſt hyperbola; ac demum illud infra coni verticem ſecare, quum eadem ſectio DFE eſt ellipſis. Unde, habita diametri ratione, tres illæ conicæ ſectiones poterunt ſequenti modo definiri.

Nimirum parabola eſt conica ſectio, in qua diameter uni laterum trianguli, per axem ſecti, eſt parallela. Hyperbola eſt ſectio conica, in qua diameter unum quidem trianguli latus infra verticem coni, & alterum ſupra verticem ſecat. Ac demum ellipſis eſt conica ſectio, in qua diameter utrique laterum trianguli infra coni verticem occurrit.

II. *Cur recta illa tali nomine vocetur, oſtenditur.*

II. Dabimus autem rectæ FG nomen *diametri*, quia tranſit velut per medium ipſius ſectionis. Ut enim ex conſtructione biſecat in K rectam DE, ita quoque dividit bifariam rectas omnes, quæ ipſi DE æquidiſtantes, utrinque ad ſectionem terminantur. Fig. 5. 6. 7.

Sit namque HI una iſtarum rectarum. Oſtendendum eſt, eam a recta FG ſecari bifariam in L. Ducatur per punctum L recta MN, ipſi BC parallela. Jamque huic MN erit HI

perinde normalis, ac eſt DE perpendicularis ſuper BC.

Et quoniam, ſecto cono plano, tranſeunte per rectas MN, HI, oritur circulus MNH, cujus diameter eſt recta MN; eadem HI, non modo inſiſtet ad angulos rectos ſuper MN, ſed bifariam quoque ab ipſa ſecabitur. Quare etiam a recta FG biſecta erit in L.

Patet autem, eandem demonſtrationem obtinere etiam, ſi ſectio DFE ſit hyperbola, & recta HI ducta ſit in ejus oppoſita æquidiſtanter ipſi DE. Quocirca recta FG erit utriuſque hyperbolæ diameter, & in utraque dividet bifariam rectas omnes, quæ ipſi DE æquidiſtantes, utrinque ad ſectionem terminantur.

III. *Diametri accidentalis quædam proprietas adnotatur.*

Fig. 5. 6. 7.

III. Sed nolim hic reticere, quod ſi triangulum per axem BAC rectum fuerit plano circuli BCD; tunc recta illa FG, quam ſectionis *diametrum* appellamus, non modo bifariam, verum etiam ad angulos rectos ſecabit, cum rectam DE, tum alias omnes, quæ ipſi DE æquidiſtantes, utrinque ad ſectionem terminantur.

Ex conſtructiono enim ad rectam BC, quæ communis eſt ſectio duorum planorum BCD, BAC, perpendicularis eſt ipſa DE. Itaque, quum duo illa plana ſibi mutuo occurrunt ad rectos angulos, quemadmodum DE exiſtit in uno eorum planorum BCD, ita perpendicularis erit ad planum alterum BAC. Sed recta FG, velut communis ſectio planorum BAC, DFE, reperitur in plano BAC. Quare erit DE perpendicularis quoque ipſi FG: & propterea, non modo bifariam, ſed

etiam

etiam ad angulos rectos ab ea ſecabitur.

Et quidem, quum conus eſt rectus, proprietas iſta diametri ſemper locum habet; quia in cono recto triangulum, per axem ſectum, plano baſis, aut circuli æquidiſtantis ſemper ad rectos angulos inſiſtit. Sed longe ſecus ſe res habet in cono ſcaleno; quandoquidem in eo triangulum, per axem ſectum, tunc demum rectum eſt ad planum baſis, aut circuli æquidiſtantis, quum perpendicularis, demiſſa ad planum illud ex vertice coni, eſt in ipſo trianguli plano.

IV. *Diametri vertices, ordinatæ, & abſciſſæ definiuntur.* FIG. 5. 6. 7.

IV. Quemadmodum autem recta FG, quæ communis eſt ſectio plani ſecantis, & trianguli per axem, vocabitur in poſterum *diameter* ſectionis DFE; ita punctum F, in quo eadem FG ſectioni occurrit, diametri *vertex* appellabitur. Sed ſemiſſes earum rectarum, quæ bifariam a diametro dividuntur, quum nobis uſui erunt, diametri *ordinatæ* dicentur. Et denique eæ diametri portiones, quæ vertice, & ordinatis continentur, ubi nobis inſervient, non alio, quam *abſciſſarum* nomine, diſtinguentur.

Quum ellipſis in orbem redeat, occurret ei diameter in duobus punctis; atque adeo duo erunt *vertices* ipſius. Similiter autem in hyperbola, ob aliam oppoſitam, quæ continuo illam comitatur, duo erunt diametri *vertices*. Sed, quemadmodum in ellipſi diameter non majorem *longitudinem* habere poteſt, quam quæ ei ab utroque vertice conceditur; ſic etiam in hyperbola, ubi quæſtio erit de *longitudine* diametri, ea tantum ipſius portio

tio veniet, quæ utroque vertice continetur.

Tantum igitur in parabola, ob unicum diametri verticem, nequit ei *longitudo* ulla præfiniri. Verum, ſi intimius rem inſpicere velimus, comperiemus in hac curva verticem alium in infinita a priore diſtantia: unde ipſa ejus diameter velut *infinitæ longitudinis* erit habenda. Neque enim alia ratione, tam in ellipſi, quam in hyperbola ſortitur diameter FG verticem alium, quam quia in utraque curva occurrit etiam lateri AC. At quicumque novit, *rectas parallelas velut occurrentes in infinita diſtantia poſſe conſiderari*; facile intelliget, hunc alium occurſum fieri in parabola, ubi a puncto F infinite receditur.

V.
Qua ratione parabola ad ellipſim, & hyperbolam reducatur.
Fig. 6. 7.

V. Et ſane, *tam ellipſis, quam hyperbola vertitur in parabolam*, quum altero diametri vertice G in infinitum abeunte, fit ipſa diameter FG infinitæ longitudinis. Neque enim punctum G in infinitum abire poteſt, niſi diameter FG æquidiſtans fiat lateri AC. Id vero quum accidit, omnino neceſſe eſt, ut ſectio DFE evadat parabola. Nam, ut ſuperius vidimus, parabola eſt conica ſectio, in qua diameter uni laterum trianguli, per axem ſecti, eſt parallela.

Hinc *conſiderari poterit parabola, tam ut ellipſis, quam ut hyperbola, cujus diameter ſit infinitæ longitudinis*. Et vel hac ſola conſideratione poterunt parabolæ proprietates omnes ex iis derivari, quæ ſive ad ellipſim, ſive ad hyperbolam pertinent. Nimirum, ſi ſedulo perpendatur, quid in ea, de qua agitur, proprietate infinita diametri longitudo mutet, ac innovet.

Pla-

Plane vero non patitur ratio Elementorum, ut in demonſtrandis parabolæ proprietatibus hæc methodus uſurpetur. Sed, ubi propriis ſuis rationibus proprietates illæ ſunt comprobatæ; volupe erit, eaſdem hac alia methodo rurſus experiri. Hinc in noſtris hiſce Elementis parabola poſt ellipſim, & hyperbolam ſemper ſub contemplationem veniet; ut ſcilicet ejus accidentia ex proprietatibus ellipſis, & hyperbolæ eruere etiam valeamus.

VI. *Etiam circulus velut ſpecies quædam ellipſis poteſt haberi.*

FIG. 7.

VI. Quemadmodum autem *ellipſis vertitur in parabolam*, quum altero diametri vertice G in infinitum abeunte, fit diameter ipſa infinitæ longitudinis, & conſequenter parallela lateri AC; ſic *eadem ellipſis tranſit in circulum*, quum abeunte in infinitum puncto K, in quo rectæ duæ FG, BC ſibi mutuo occurrunt, evadit diameter FG parallela ipſi BC.

Nam in iſto caſu una cum puncto K abibit etiam in infinitum recta DE, quæ communis eſt ſectio plani ſecantis cum plano baſis. Unde, quum duo iſta plana conveniant inter ſe in infinita diſtantia, ipſa quoque evadent parallela. Hinc ſecabitur conus plano, æquidiſtante baſi: & propterea, ex ſuperius oſtenſis, ipſa ſectio circulus erit.

Id quum ita ſit, *poterit circulus velut ſpecies quædam ellipſis haberi.* Et revera, prout ex cono oritur, eſt prima infinitarum variationum, quas in eo ſubit ellipſis. Sicuti enim, ſecto cono plano, æquidiſtante baſi, producitur circulus; ſic, inclinato paululum plano verſus baſim, fit ſtatim locus ellipſi, cujus, pro infinitis inclinationibus diverſis plani ſecantis, in-

infinita quoque diverſitas extat.

Ultima autem infinitarum variationum, quas in cono patitur ellipſis, parabola eſt; ut quæ contingit, quum planum ſecans non amplius egreditur ex cono. Sed parabola eſt etiam prima ex infinitis variationibus, quibus in cono ſubjacet hyperbola; quippe quæ confeſtim eam ſubſequuntur. Quumque demum hyperbola deſinat in lineam rectam; hæc quoque velut ultima hyperbolarum poterit conſiderari.

VII. *Omnis recta, quæ ex cono oritur, poteſt ad hyperbolam revocari.*

VII. Interim *linea recta, quæ ex cono eruitur, quandoque eſt ſimplex & unica, quandoque vero geminata*. Ad eam quippe eruendam, ſemper plano, per verticem tranſeunte, opus eſt. Sed, ubi planum iſtud contingit ſuperficiem conicam; recta erit ſimplex, ac unica. Ubi vero eam partitur, & ſecat; recta non ſimplex, ſed geminata orietur.

Et ne aliquid prætereamus, quod ſcitu ſit dignum, notetur hic velim, quod ſicuti recta illa ſimplex, quæ oritur per planum, conicam ſuperficiem contingens, habenda eſt velut ultima infinitarum variationum, quas in cono ſubit hyperbola; ita recta illa geminata, quæ gignitur, ſecando conum plano per verticem, conſiderari poterit velut hyperbola, cujus diameter ſit nullius prorſus longitudinis.

Jam enim vidimus ſuperius, quod quum diameter hyperbolæ ſit infinitæ longitudinis, hyperbola ipſa vertatur in parabolam, & ejus oppoſita abeat in infinitum, nec amplius extet. At, *ſi eadem hyperbolæ diameter minuatur,*

tur in infinitum, & prorſus evaneſcat; tunc binæ hyperbolæ oppoſitæ accedent ad ſe mutuo, & vertentur in rectas duas, ſe invicem decuſſantes in vertice coni; quum non alia ratione abire poſſit in nihilum diameter hyperbolæ, quam plano ſectionis per coni verticem tranſeunte.

VIII. *In hyperbolis oppoſitis, ſicut eadem eſt diameter, ita eadem eſt poſitio ordinatarum.*

VIII. Cæterum, priuſquam huic capiti finem imponamus, juvat advertere, quod ſicuti hyperbolarum oppoſitarum eadem eſt diameter, *ſic in utraque hyperbola eadem quoque ſit poſitio earum rectarum, quæ diametri ordinatæ dicuntur.*

Monuimus namque ſuperius, quod recta FG biſariam dividit, non ſolum eas omnes, quæ in hyperbola DFE ducuntur æquidiſtanter ipſi DE; verum etiam quotquot in hyperbola oppoſita eidem DE ſunt parallelæ. Quare, non modo FG erit diameter utriuſque hyperbolæ, ſed ordinatæ, quæ pertinent ad hanc diametrum, erunt in utraque hyperbola parallelelæ rectæ DE. FIG. 6.

Clarius autem conſtabit veritas hujus rei, ſi in cono oppoſito plano, æquidiſtante baſi ipſius coni principalis, circulus fiat; tum quæratur triangulum per axem, quod dirigat ſectionem, factam in illo cono. Etenim, quum oriatur triangulum iſtud, producendo latera trianguli BAC, quod in cono principali dirigit ſectionem DFE; liquido patebit, eandem eſſe diametrum hyperbolarum oppoſitarum, & eandem eſſe pariter in utraque poſitionem ordinatarum.

CAP.

CAP. IV.

Quæ ſit natura ellipſis relate ad diametrum, definitur.

I. *Ellipſis relate ad diametrum proprietas prima.*

I. OStenſa geneſi ſectionum conicarum; ſequitur, ut propriam cujuſque naturam relate ad diametrum definiamus. Primo igitur in ellipſi, *ſi binæ ad diametrum ordinatæ ducantur, erunt earum quadrata inter ſe, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur.*

FIG. 7. Fiat enim in cono ABC ſectio elliptica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ utrique laterum trianguli, per axem ſecti, infra coni verticem occurrit, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, baſi æquidiſtantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt iſtarum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN. Quare erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam ratio horum rectangulorum componitur ex BK ad ML, & ex CK ad NL; ſive etiam ex FK ad FL, & ex GK ad GL. Sed

duæ

duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Itaque erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

II. Proprietas ſecunda, diametri parametrum exhibens. Fig. 7.

II. Hinc, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK ſit ad rectangulum ei correſpondens FKG, veluti eſt ipſa FO ad diametrum FG; erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum FLG, quod illi correſpondet, ſimiliter ut FO ad FG.

Oſtenſum eſt enim, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Quare erit permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita HL quadratum ad rectangulum FLG. Ponitur autem, DK quadratum eſſe ad rectangulum FKG, ut eſt FO ad FG. Et igitur ex æquali HL quadratum ad rectangulum FLG erit etiam, ut FO ad FG.

Recta iſta FO diametri *parameter* deinceps appellabitur; & rectangulum, ſub ipſa, & diametro contentum, diametri *figura* dicetur. Ejus autem habita ratione, perſpicuum eſt, id quidem ellipſi contingere, ut *quadratum cujuſvis ordinatæ ſit ad rectangulum, quod ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continetur, in eadem illa ratione, quam parameter ad diametrum habet.*

III. Proprietas tertia, elli-

III. Maneat jam parameter FO ordinatis diametri parallela, in qua utique poſitione ſem-

pſis denominationem oſtendens.

ſemper ea intelligi debet. Jungatur alia ejus extremitas O cum vertice altero G per rectam GO, cui occurrat in R ordinata quævis DK. Et quadratum ordinatæ hujus DK æquale erit correſpondenti rectangulo FKR.

Fig. 7.

Nam rectangulum FKR eſt ad rectangulum FKG, ut KR ad KG. Sed KR eſt ad KG, ut FO ad FG, ſive etiam, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Itaque erit ex æquali, ut rectangulum FKR ad rectangulum FKG, ita DK quadratum ad idem rectangulum FKG: & propterea DK quadratum, & rectangulum FKR æqualia erunt inter ſe.

Perſpicuum eſt autem, rectangulum FKR minus eſſe rectangulo OFK. Quare quadratum ordinatæ DK ab eodem rectangulo OFK pariter deficiet. Hinc ſortita eſt hujuſmodi conica ſectio nomen *ellipſis*; quia in ea *quadratum cujuſvis ordinatæ a rectangulo, quod fit ex parametro in abſciſſam correſpondentem, continuo deficit*.

Defectus vero eſt rectangulum aliud, quod inſiſtens eidem abſciſſæ, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod diametri figuram conſtituit. Nam, ducta RS, ipſi FG parallela, erit relate ad quadratum ipſius DK rectangulum OSR iſtiuſmodi defectus: quod quidem ipſi RS, ſeu FK inſiſtit; & eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex FO in FG; quum ſit circa diagonalem illius.

IV.
Ratio parametri ad diametrum per rectas, in

IV. Cæterum *ratio, quam habet in ellipſi parameter ad diametrum, poteſt per rectas, in cono ductas, facili negotio definiri*. Poſitis enim omnibus ut ſupra, ſi ducatur ex vertice coni

A re-

A recta AX, ipſi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in X; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum. *cono ductas, definitur.* FIG. 8.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK eſt ad FK, ut BX ad AX; itemque CK eſt ad GK, ut CX ad AX. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BX ad AX, & ex CX ad AX.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum BXC ad AX quadratum. Et igitur erit ex æquali, ut rectangulum BXC ad AX quadratum, ita DK quadratum ad rectangulum FKG. Sed DK quadratum eſt ad rectangulum FKG, ut FO ad FG. Quare erit rurſus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

V. Atque hinc modo facile erit, *ſecto ex cono triangulo per axem, eruere, ope ejus, ellipſim ex ipſo cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem*. Sit enim BAC triangulum, per axem ſectum, cujus ope ellipſis ex cono eſt eruenda. Ducatur in plano ejus recta AX, quæ conveniat cum BC, producta, ita quidem in X, ut rectangulum BXC ad AX quadratum ſit in data illa ratione. Et quælibet ellipſis, quæ per triangulum BAC ſubinde eruitur ex cono, ut diameter ejus parallela fiat ipſi AX, quæſitæ conditionem adimplebit.

V. *Deductio ellipſis ex cono, in qua parametri ad diametrum data ſit ratio.* FIG. 8.

Neque vero difficile erit, adhibito triangulo BAC, talem ex cono ellipſim eruere, quæ diametrum habeat, rectæ AX parallelam. Ducatur ſiquidem in plano ejus trianguli recta quævis FG, æquidiſtans ipſi AX, & conveniens cum BC in K. Agatur poſtea per punctum iſtud K in plano circuli BCD recta DE, eidem BC perpendicularis. Et planum, tranſiens per rectas FG, DE, ellipſim, quam quærimus, in cono producet.

Hinc etiam, ſi ellipſim, ex cono eruendam, talem eſſe oporteat, ut *data ſit in ea, tam ratio parametri ad diametrum, quam ipſius diametri longitudo*; ſolvetur problema, ſi ducta, ut prius, recta AX ea lege, ut rectangulum BXC ad AX quadratum ſit in data ratione; agatur deinde ita quidem FG, ut non modo ſit parallela ipſi AX, ſed etiam, ut portio ejus, trianguli lateribus comprehenſa, datam diametri longitudinem adæquet.

VI. *Solutio problematis, quod pro deductione ejus ellipſis veluti lemma requiritur.*

VI. Sed, *ad lemmaticum illud problema ſolvendum*, nimirum ad ducendam in plano trianguli rectam illam AX; nec etiam magno mentis acumine opus eſt. Abſcindatur enim ex trianguli latere uno AC portio CM, quæ ad ipſum

Fig. 9. AC datam illam rationem obtineat. Agatur poſtea per punctum M recta MN, ipſi BC parallela, quæ conveniat in N cum circumferentia circuli, triangulum ambientis. Et punctum iſtud N determinabit poſitionem ipſius AX.

Eſt namque, propter circulum, rectangulum BXC æquale rectangulo AXN. Sed rectangulum AXN eſt ad AX quadratum, ut NX ad AX, ſive etiam, ut CM ad AC. Quare

re ipſum quoque rectangulum BXC ad AX quadratum erit, ut CM ad AC: & propterea, quum CM ſit ad AC in data ratione; erit pariter in eadem data ratione rectangulum BXC ad AX quadratum.

Quum data ratio eſt minoris ad majus, recta illa AX ſemper duci poteſt. Nam eo in caſu punctum M cadit inter alia duo A, & C; adeoque recta MN, quæ ipſi BC æquidiſtanter ducitur, circuli circumferentiæ ſemper occurrit. Viciſſim autem, quum data ratio eſt majoris ad minus, non ſemper duci poterit recta illa AX. Nam tunc punctum M cadit ad partem alteram ipſius A; adeoque fieri quandoque poteſt, ut recta MN circuli circumferentiam non ſecet.

Unde etiam, ſecto ex cono triangulo per axem, ſemper licebit, ope ejus, eruere ellipſim ex ipſo cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem, quotieſcumque data ratio eſt minoris ad majus. Sed, ſi viciſſim ratio data fuerit majoris ad minus, fieri quandoque poteſt, ut ſit omnino impoſſibile, adhibito eo triangulo, optatam ex cono ellipſim eruere.

VII. *Figuræ, ad ellipſis diametrum pertinentis, magnitudo per rectas, in cono ductas, definitur.* Fig. 8.

VII. Nullo etiam negotio, *per rectas, in cono ductas, determinari poteſt magnitudo, quam diametri figura habet in ellipſi*. Manentibus namque omnibus, ut ſupra, ducantur ex utroque diametri vertice rectæ FR, GS, ipſi BC parallelæ, quæ cum lateribus trianguli conveniant in punctis R, & S. Et rectangulum, ſub his rectis comprehenſum, diametri figuram adæquabit.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK eſt ad FK, ut GS ad FG; itemque CK eſt ad GK, ut FR ad FG. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex GS ad FG, & ex FR ad FG.

Et quoniam duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum ſub ipſis FR, GS ad FG quadratum; erit ex æquali, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum. Unde, ſicuti DK quadratum eſt ad rectangulum FKG, ut FO ad FG; ſic erit rurſus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum.

Jam, aſſumpta communi altitudine FG, ut eſt FO ad FG, ita eſt rectangulum ex FO in FG ad idem FG quadratum. Et igitur rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FO in FG. Sed figura diametri conſtituitur per rectangulum ex FO in FG. Quare aliud illud rectangulum ex FR in GS æquale erit præfatæ diametri figuræ.

VIII. *Theoremata pro determinatione parametri, etiam ignorata diametri longitudine.*

VIII. Ex eo autem, quod rectangulum ſub ipſis FR, GS adæquet diametri figuram, quæ conſtituitur per rectangulum ex FO in FG, plura nobis derivantur theoremata, quorum ope, *etiam ignorata diametri longitudine, definiri poteſt parameter ejus in cono*.

Fig. 8.

Nimirum primo FO erit ad FR, ut eſt BX ad AX. Nam, quum rectangulum ex FR in GS ſit æquale rectangulo ex FO in FG;

erit,

erit, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Sed GS eſt ad FG, ut BX ad AX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita BX ad AX.

Secundo FO erit ad GS, ut eſt CX ad AX. Nam, ob eandem eorum rectangulorum æqualitatem, erit, ut FO ad GS, ita FR ad FG. Sed FR eſt ad FG in eadem ratione, quam habet CX ad AX. Quare erit ex æquali, ut FO ad GS, ita CX ad AX.

Tertio FO erit ad AF, ut eſt rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Nam FO ad AF rationem habet compoſitam ex FO ad FR, & ex FR ad AF; ſive etiam ex BX ad AX, & ex BC ad AB. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita rectangulum CBX ad rectangulum BAX.

Denique FO erit ad AG, ut eſt rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Nam FO ad AG rationem habet compoſitam ex FO ad GS, & ex GS ad AG; ſive etiam ex CX ad AX, & ex BC ad AC. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Quare erit ex æquali, ut FO ad AG, ita rectangulum BCX ad rectangulum CAX.

IX. *Determinatio parametri ſimpliciſſima, a diametri longitudine nullimode dependens.*

IX. Unoquoque horum theorematum *determinabitur parameter in cono, etiam diametri longitudine non cognita*. Sed determinationem omnium *ſimpliciſſimam* ſuppetit nobis ipſa illa proprietas, unde ea fluunt theoremata. Fiat enim angulus FRV æqualis angulo BFG. Et portio FV, abſciſſa ex diametro per Fig. 8.

rectam RV, erit quæſita parametri longitudo.

Nam, ob æqualitatem eorum angulorum, erit, ut FR ad FV, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FV in FG. Jam vero rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex FV in FG; adeoque, quemadmodum unum ejus latus FG eſt ipſa diameter, ita latus alterum FV diametri parametrum adæquabit.

X.

Alia ejuſdem parametri determinatio, nulla habita ratione longitudinis diametri.

X. Idem problema *de determinanda parametro in cono, nulla habita ratione longitudinis diametri*, poteſt etiam reſolvi in hunc modum.

Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK, perpendicularis ipſi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abſcindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æquidiſtanter ipſi BC, longitudinem parametri exhibebit.

FIG. 8.

Demiſſa etenim ſuper AX perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione compoſita ex AK ad AI, & ex AI, ſeu AH ad BL. Sed AK eſt ad AI, ut BC ad MN; itemque AH eſt ad BL, ut AF ad AB, ſive, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione compoſita ex FR ad BC, & ex BC ad MN: proindeque, quum duæ iſtæ rationes componant pariter rationem, quam habet FR ad MN; erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN.

Et quoniam AK eſt ad BL, ut AX ad BX, ſive etiam, ut FG ad GS; erit rurſus ex æqua-

æquali, ut FR ad MN, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex MN in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex MN in FG: & propterea, ſicuti unum ejus latus FG eſt ipſa diameter, ita latus alterum MN diametri parametrum exhibebit.

CAP. V.

Quid hyperbolæ relate ad diametrum accidat, oſtenditur.

I. ELlipſi eſt valde affinis hyperbola. Nam in iſta quoque, *ſi binæ ad diametrum ordinatæ ducantur, erunt earum quadrata inter ſe, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur.* I. *Hyperbolæ relate ad diametrum proprietas prima.*

Fiat etenim in cono ABC ſectio hyperbolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ trianguli, per axem ſecti, unum quidem latus infra coni verticem, alterum ſupra verticem ſecat, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG. FIG. 6.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, baſi æquidiſtantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt iſta-

rum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN. Quare erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam ratio horum rectangulorum componitur ex BK ad ML, & ex CK ad NL, ſive etiam ex FK ad FL, & ex GK ad GL. Sed duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Itaque erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

Perſpicuum eſt autem, eandem demonſtrationem obtinere quoque, ſi binæ illæ ordinatæ ducantur in hyperbola oppoſita; vel ſi una ex iis ducatur in hyperbola principali, & altera in ejus adverſa. Unde, ſicuti eadem eſt utriuſque hyperbolæ diameter, & eadem poſitio ſuarum ordinatarum; ſic relate ad diametrum eadem quoque erit utriuſque natura.

II. *Proprietas ſecunda, exhibens diametri parametrum, & figuram.* FIG. 6.

II. In utraque etiam hyperbola, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK ſit ad rectangulum ei correſpondens FKG, velut eſt ipſa FO ad diametrum FG; erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum FLG, quod illi correſpondet, ſimiliter, ut FO ad FG.

Oſtenſum eſt enim, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Quare erit permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita HL quadratum ad rectangulum FLG. Poni-

nitur autem, DK quadratum eſſe ad rectangulum FKG, ut eſt FO ad FG. Et igitur ex æquali HL quadratum ad rectangulum FLG erit etiam, ut FO ad FG.

Recta iſta FO etiam in hyperbola diametri *parameter* appellabitur; & rectangulum, ſub ipſa, & diametro contentum, hic quoque diametri *figura* dicetur. Ejus autem habita ratione, perſpicuum eſt, id quidem utrique hyperbolæ contingere, ut *quadratum cujuſvis ordinatæ ſit ad rectangulum, quod ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continetur, in eadem illa ratione, quam parameter ad diametrum habet.*

III. *Proprietas tertia, hyperbolæ denominationem oſtendens.* FIG. 6.

III. Maneat jam FO, ordinatis diametri parallela, in qua utique poſitione ſemper ea intelligi debet. Jungatur alia ejus extremitas O cum vertice altero G per rectam GO, cui occurrat in R ordinata quævis DK. Et quadratum ordinatæ hujus DK æquale erit correſpondenti rectangulo FKR.

Nam rectangulum FKR eſt ad rectangulum FKG, ut KR ad KG. Sed KR eſt ad KG, ut FO ad FG, ſive etiam, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Itaque erit ex æquali, ut rectangulum FKR ad rectangulum FKG, ita DK quadratum ad idem rectangulum FKG: & propterea DK quadratum, & rectangulum FKR æqualia erunt inter ſe.

Perſpicuum eſt autem, rectangulum FKR majus eſſe rectangulo OFK. Quare quadratum ordinatæ DK idem rectangulum OFK pariter excedet. Hinc ſortita eſt hujuſmodi conica ſectio nomen *hyperbolæ*, quia in ea

qua-

quadratum cujuſvis ordinatæ excedit ſemper rectangulum, quod fit ex parametro in abſciſſam correſpondentem.

Exceſſus porro eſt rectangulum aliud, quod inſiſtens eidem abſciſſæ, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod diametri figuram conſtituit. Nam, ducta OS ipſi FG parallela, erit relate ad quadratum ipſius DK rectangulum OSR iſtiuſmodi exceſſus: quod quidem ipſi OS, ſeu FK inſiſtit, & eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex FO in FG; quum ſint circa eandem diagonalem ejus rectanguli, quod ſub ipſis GK, KR continetur.

IV.
Ratio parametri ad diametrum per rectas, in cono ductas, determinatur.
FIG. 10.

IV. Cæterum etiam in hyperbola *ratio, quam habet parameter ad diametrum, poteſt per rectas, in cono ductas, facili negotio definiri.* Poſitis enim omnibus, ut ſupra, ſi ducatur ex vertice coni A recta AX, ipſi FG parallela, quæ conveniat cum BC in X; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK eſt ad FK, ut BX ad AX; itemque CK eſt ad GK, ut CX ad AX. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BX ad AX, & ex CX ad AX.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum BXC ad AX quadratum. Et igitur erit ex æquali, ut rectangulum BXC ad AX quadratum, ita DK quadratum ad rectangulum FKG. Sed DK

qua-

quadratum eſt ad rectangulum FKG, ut FO ad FG. Quare erit rurſus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

V. Deductio hyperbolæ ex cono, in qua parametri ad diametrum data ſit ratio.

FIG. 10.

V. Atque hinc modo facile erit, *ſecto ex cono triangulo per axem, eruere, ope ejus, hyperbolam ex ipſo cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem*. Sit enim BAC triangulum, per axem ſectum, cujus ope hyperbola ex cono eſt eruenda. Ducatur in plano ejus recta AX, quæ conveniat cum BC ita quidem in X, ut rectangulum BXC ad AX quadratum ſit in data illa ratione. Et quælibet hyperbola, quæ per triangulum BAC ſubinde eruitur ex cono, ut diameter ejus parallela ſiat ipſi AX, quæſitæ conditionem adimplebit.

Neque vero difficile erit, adhibito triangulo BAC, talem ex cono hyperbolam eruere, quæ diametrum habeat, rectæ AX parallelam. Ducatur ſiquidem in plano ejus trianguli recta quævis FG, æquidiſtans ipſi AX, & conveniens cum BC in K. Agatur poſtea per punctum iſtud K in plano circuli BCD recta DE, eidem BC perpendicularis. Et planum, tranſiens per rectas FG, DE, hyperbolam, quam quærimus, in cono producet.

Hinc etiam, ſi hyperbolam, ex cono eruendam, talem eſſe oporteat, ut *data ſit in ea, tam ratio parametri ad diametrum, quam ipſius diametri longitudo*; ſolvetur problema, ſi ducta, ut prius, recta AX ea lege, ut rectangulum BXC ad AX quadratnm ſit in data ratione; agatur deinde ita quidem FG, ut

non

non modo ſit parallela ipſi AX, ſed etiam, ut portio ejus, trianguli lateribus comprehenſa, datam diametri longitudinem adæquet.

VI. *Solutio problematis, quod pro deductione ejus hyperbola velut lemma requiritur.*

VI. Sed, *ad lemmaticum illud problema ſolvendum*, nimirum ad ducendam in plano trianguli BAC rectam illam AX; neque etiam magna animi ſolertia opus eſt. Producatur enim trianguli latus unum AC adeo quidem in M, ut CM ad AC datam illam rationem obtineat. Agatur poſtea per punctum M recta MN, ipſi BC parallela, quæ conveniat in N cum circumferentia circuli, triangulum ambientis. Et punctum iſtud N definiet poſitionem ipſius AX. [Fig. 11.]

Nam, propter circulum, rectangulum BXC eſt æquale rectangulo AXN. Sed rectangulum AXN eſt ad AX quadratum, ut NX ad AX, ſive, ut CM ad AC. Quare ipſum quoque rectangulum BXC ad AX quadratum erit, ut CM ad AC: & propterea, quum CM ſit ad AC in data ratione; erit pariter in eadem data ratione rectangulum BXC ad AX quadratum.

Sive autem data ratio ſit minoris ad majus, ſive majoris ad minus, recta illa AX non ſemper duci poterit. Hic enim punctum M numquam reperitur inter alia duo A, & C; ſed ſemper ad partem alteram ipſius C: proindeque, quæcumque ſit ratio ipſius CM ad AC; ſemper fieri poteſt, ut recta MN, quæ ducitur per punctum M ipſi BC æquidiſtanter, circuli circumferentiam non ſecet.

Unde etiam, ſi ex cono triangulum per axem ſecetur, & eruenda ſit, ope ejus, hyperbola ex ipſo cono, in qua parameter ad diametrum

da-

datam habeat rationem : problema poterit eſſe ſolutu impoſſibile, non modo, quum ratio data eſt majoris ad minus; verum etiam, quum eadem illa ratio eſt viciſſim minoris ad majus.

VII. Etiam in hyperbola *magnitudo, quam habet diametri figura, per rectas, in cono ductas, nullo negotio poteſt definiri*. Manentibus namque omnibus, ut ſupra, ducantur ex utroque diametri vertice rectæ FR, GS, ipſi BC parallelæ, quæ conveniant in punctis R, & S cum lateribus trianguli. Et rectangulum, ſub his rectis comprehenſum, diametri figuram adæquabit.

VII. *Figuræ, ad hyperbolæ diametrum pertinentis, magnitudo per rectas, in cono ductas, definitur.*

FIG. 10.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK eſt ad FK, ut GS ad FG; itemque CK eſt ad GK, ut FR ad FG. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex GS ad FG, & ex FR ad FG.

Et quoniam duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum ſub ipſis FR, GS ad FG quadratum; erit ex æquali, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum. Unde, ſicuti DK quadratum eſt ad rectangulum FKG, ut FO ad FG; ſic erit rurſus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum.

Jam, aſſumpta communi altitudine FG, ut eſt FO ad FG, ita eſt rectangulum ex FO in FG ad idem FG quadratum. Et igitur rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex

FO

FO in FG. Sed figura diametri conſtituitur per rectangulum ex FO in FG. Quare aliud illud rectangulum ex FR in GS præfatam diametri figuram adæquabit.

VIII. *Theoremata pro determinatione parametri, etiam ignorata diametri longitudine.*

VIII. Ex eo autem, quod rectangulum ſub ipſis FR, GS adæquet diametri figuram, quæ conſtituitur per rectangulum ex FO in FG, plura nobis derivantur theoremata, quorum ope, *etiam ignorata diametri longitudine, definiri poterit parameter ejus in cono.*

FIG. 10.

Nimirum primo FO erit ad FR, ut eſt BX ad AX. Nam, quum rectangulum ex FR in GS ſit æquale rectangulo ex FO in FG; erit, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Sed GS eſt ad FG, ut BX ad AX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita BX ad AX.

Secundo FO erit ad GS, ut eſt CX ad AX. Nam, ob eandem eorum rectangulorum æqualitatem, erit, ut FO ad GS, ita FR ad FG. Sed FR eſt ad FG in eadem ratione, quam habet CX ad AX. Quare erit ex æquali, ut FO ad GS, ita CX ad AX.

Tertio FO erit ad AF, ut eſt rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Nam FO ad AF rationem habet compoſitam ex FO ad FR, & ex FR ad AF; ſive etiam ex BX ad AX, & ex BC ad AB. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita rectangulum CBX ad rectangulum BAX.

Denique FO erit ad AG, ut eſt rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Nam FO ad AG rationem habet compoſitam ex FO ad

GS

GS, & ex GS ad AG; ſive etiam ex CX ad AX, & ex BC ad AC. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Quare erit ex æquali, ut FO ad AG, ita rectangulum BCX ad rectangulum CAX.

IX. *Determinatio parametri ſimpliciſſima, a diametri longitudine nullimode dependens.*

IX. Unoquoque horum theorematum *determinabitur parameter in cono, etiam diametri longitudine non cognita*. Sed determinationem omnium *ſimpliciſſimam* ſuppetit nobis ipſa illa proprietas, unde recenſita fluunt theoremata. Fiat enim angulus FRV æqualis angulo AFG. Et portio FV, abſciſſa ex diametro FG per rectam RV, erit quæſita parametri longitudo. FIG. 10.

Nam, ob æqualitatem eorum angulorum, erit, ut FR ad FV, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FV in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quocirca eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex FV in FG: adeoque, quemadmodum unum ejus latus FG eſt ipſa diameter, ita latus alterum FV diametri parametrum adæquabit.

X. *Alia ejuſdem parametri determinatio, nulla habita ratione longitudinis diametri.*

X. Idem problema *de determinanda parametro in cono, nulla habita ratione longitudinis diametri*, poteſt etiam reſolvi in hunc modum.

Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK perpendicularis ipſi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abſcindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æ- FIG. 10.

qui-

quidiſtanter ipſi BC, longitudinem parametri exhibebit.

Demiſſa etenim ſuper AX perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione compoſita ex AK ad AI, & ex AI, ſeu AH ad BL. Sed AK eſt ad AI, ut BC ad MN; itemque AH eſt ad BL, ut AF ad AB, ſive, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione compoſita ex FR ad BC, & ex BC ad MN: proindeque, quum duæ iſtæ rationes componant pariter rationem, quam habet FR ad MN; erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN.

Et quoniam AK eſt ad BL, ut AX ad BX, ſive etiam, ut FG ad GS; erit rurſus ex æquali, ut FR ad MN, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex MN in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex MN in FG: & propterea, ſicuti unum ejus latus FG eſt ipſa diameter, ita latus alterum MN diametri parametrum adæquabit.

C A P. VI.

Quæ ſit parabolæ relate ad diametrum natura, aperitur.

I. *Parabolæ relate ad diametrum proprietas prima.*

I. Reliquum jam eſt, ut parabolæ relate ad diametrum naturam aperiamus. Primo igitur in ea, *ſi binæ ad diametrum ordinatæ ducantur; erunt earum quadra-*

ta

ta inter ſe, quemadmodum ſunt abſciſſæ, quæ iis ordinatis correſpondent.

Fiat enim in cono ABC ſectio parabolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ uni laterum trianguli, per axem ſecti, debet eſſe parallela, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, quemadmodum eſt abſciſſa FK ad abſciſſam FL. FIG. 5.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, baſi æquidiſtantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt iſtarum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN. Itaque erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam, propter parallelas AC, FG, latera horum rectangulorum CK, NL æqualia ſunt inter ſe. Quare ratio ipſorum æqualis erit ei, quam habet latus BK ad latus ML. Sed BK eſt ad ML, ut FK ad FL. Et igitur erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita FK ad FL.

II. *Propriętas ſecunda, exhibens diametri parametrum, & parabolæ denominationem oſtendens.*

II. Hinc, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK ſit æquale rectangulo correſpondenti OFK; erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL æquale pariter rectangulo OFL, quod ei correſpondet.

Oſtenſum eſt enim, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt FK ad FL. Sed in hac eadem ratione eſt etiam rectangulum OFK ad rectangulum OFL. Quare erit ex æquali, FIG. 5.

ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum OFK ad rectangulum OFL: & propterea, ſicuti ponitur DK quadratum æquale rectangulo OFK, ita HL quadratum rectangulo OFL pariter æquale erit.

Recta iſta FO, quum nobis uſui erit, diametri *parameter* appellabitur, quæ quidem in ea ſemper poſitione relate ad diametrum intelligi debet, ut ſit ejus ordinatis parallela. Ipſius autem habita ratione, perſpicuum eſt, id quidem parabolæ contingere, ut *quadratum cujuſvis ordinatæ ſit æquale rectangulo, quod ſit ex parametro in abſciſſam correſpondentem.* Nec ſane alia de cauſa, quam *ob æqualitatem iſtam*, ſortita eſt hæc conica ſectio *parabolæ* nomen.

III. *Theoremata duo, pro determinanda in ipſo cono parametri longitudine.* Fig. 12.

III. Cæterum, *ad determinandam in ipſo cono parametri longitudinem*, uſui nobis eſſe poſſunt theoremata duo, quæ ſequuntur.

Primum eſt, quod, ſi ex vertice diametri F ducatur recta FR, ipſi BC parallela, FO ſit ad FR, ut eſt FR ad AR, ſive etiam, ut eſt BC ad AC. Nam idem DK quadratum æquale eſt, tum rectangulo BKC, propter circulum, cum rectangulo OFK, propter parabolam. Quare duo iſta rectangula BKC, OFK æqualia erunt inter ſe: & propterea erit, ut BK ad FK, ita FO ad CK, ſeu FR. Sed BK eſt ad FK, ut FR ad AR, ſive, ut BC ad AC. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita FR ad AR, vel ita BC ad AC.

Alterum theorema eſt, quod FO ſit ad AF, ut eſt BC quadratum ad rectangulum BAC. Nam FO eſt ad AF in ratione compo-

ſita

ſita ex FO ad FR, & ex FR ad AF; ſive etiam ex BC ad AC, & ex BC ad AB. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet BC quadratum ad rectangulum BAC. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita BC quadratum ad rectangulum BAC.

IV. Utroque horum theorematum *determinabitur in ipſo cono longitudo parametri.* Speciatim vero ex theoremate primo ſuboritur nobis determinatio iſta, valde *ſimplex*, ac *elegans*. Nimirum ad punctum R fiat angulus FRV, æqualis angulo BFG, ſive BAC. Et portio FV, abſciſſa ex diametro FG per rectam RV, erit quæſita parametri longitudo.

IV. *Modus ſimplex, & elegans determinandi longitudinem parametri in cono.* FIG. 12.

Nam, ob angulos illos æquales, erit, ut FV ad FR, ita BC ad AC. Sed ex primo theoremate BC eſt ad AC, ut FO ad FR. Itaque erit ex æquali, ut FV ad FR, ita FO ad eandem FR: & propterea FV ipſi FO æqualis erit.

V. Idem problema, *de determinanda in cono longitudine parametri*, reſolvi quoque poteſt in hunc modum.

V. *Alter modus determinandi in cono parametri longitudinem.* FIG. 12.

Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK, perpendicularis ipſi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abſcindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æquidiſtanter ipſi BC, longitudinem parametri exhibebit.

Demiſſa enim ſuper AC perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione compoſita ex AK ad AI, & ex AI, ſeu AH ad BL. Sed AK eſt ad AI, ut BC ad MN; itemque AH

eſt ad BL, ut AF ad AB, ſive etiam, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione compoſita ex FR ad BC, & ex BC ad MN.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet FR ad MN. Itaque erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN. Sed AK eſt ad BL, ut AC ad BC, ſive ex primo theoremate, ut FR ad FO. Quare erit rurſus ex æquali, ut FR ad MN, ita FR ad FO: proindeque duæ MN, FO æquales erunt inter ſe.

VI. Deductio parabolæ ex cono, cujus diameter datam parametrum habeat.

VI. Quemadmodum autem, facta in cono ſectione parabolica, determinari poteſt in ipſo cono parameter, ad ejus diametrum pertinens; ſic viciſſim, *ſecto ex cono triangulo per axem, licebit, ope ejus, eruere parabolam ex ipſo cono, cujus diameter datam parametrum habeat.*

FIG. 12. Sit enim BAC triangulum, per axem ſectum, cujus ope parabola ex cono eſt eruenda. Abſcindatur ex baſi ejus BC portio CK talis longitudinis, ut data parameter ſit ad eam, veluti eſt BC ad AC. Tum per punctum K agatur, tam in plano trianguli BAC recta FG, ipſi AC parallela, quam in plano circuli BCD recta DE, alteri BC normalis. Et planum, tranſiens per binas iſtas rectas FG, DE, quæſitam in cono parabolam producet.

Nam, quum planum iſtud occurrat plano circuli BCD in recta DE, ipſi BC normalis erit FG ortæ ſectionis conicæ diameter. Sed ex conſtructione FG eſt parallela lateri AC. Quare ipſa ſectio DFE parabola erit. Deinde, ducta ex vertice diametri F recta FR æquidiſtanter ipſi BC; erit diametri ejus parameter

ad

ad rectam iſtam FR, ut BC ad AC. Sed in eadem ratione eſt etiam ex conſtructione parameter data ad portionem CK, quæ ipſi FR eſt æqualis. Itaque parameter diametri FG erit ipſa parameter data.

VII. Sed videamus modo, qua ratione *proprietates ellipſis, & hyperbolæ vertantur in eas, quæ parabolæ competunt, ubi earum curvarum diameter infinitæ longitudinis fieri ſupponitur.* VII.

Qua ratione proprietates parabolæ ex iis, quæ ellipſi, & hyperbolæ competunt, ſunt deducendæ.

Fig. 5. 6. 7.

Nimirum primo, tam in ellipſi, quam in hyperbola eſt, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Jam, abeunte in infinitum puncto G, altero diametri vertice, rectæ duæ KG, LG fiunt longitudinis infinitę;adeoque,quum differant a ſe mutuo per finitam longitudinem KL, ſumi poterunt velut æquales inter ſe. Unde erit rectangulum FKG ad rectangulum FLG, ut eſt FK ad FL: & propterea in hac eadem ratione erit pariter in parabola DK quadratum ad HL quadratum.

Deinde in utraque etiam earum curvarum quadratum cujuſvis ordinatæ DK eſt ad rectangulum ei correſpondens FKG, ut parameter FO ad diametrum FG; ſive, aſſumpta communi altitudine FK,ut rectangulum OFK ad rectangulum KFG. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ KG, FG fiunt æquales; atque adeo æqualia pariter rectangula FKG, KFG. Quare in parabola etiam DK quadratum æquale fiet rectangulo OFK.

Id ipſum conſequitur quoque ex tertia earum curvarum proprietate, juxta quam

DK quadratum eſt æquale rectangulo FKR. Nam, quotieſcumque in infinitum abit punctum G, rectæ duæ FG, OG fiunt parallelæ. Unde trapetium OFKR vertitur in parallelogrammum; atque adeo latera ejus oppoſita FO, KR evadunt æqualia. Quo fit, ut rectangulum OFK ſit æquale rectangulo FKR; & conſequenter, ut DK quadratum, velut æquale rectangulo FKR, adæquet quoque rectangulum OFK.

VIII. *Oſtenditur eadem ratione, qualis eſſe debeat in parabola, tū ratio parametri ad diametrum, cum figura magnitudo.*

FIG. 8. 10. 12.

VIII. Ulterius in parabola, quum parameter ſit finita, diameter autem infinitæ longitudinis, *ratio parametri ad diametrum debet eſſe infinite parva*. Profecto autem finita illa ratio, quam vidimus ſuperius obtinere in ellipſi, & hyperbola, talis evadit, quotieſcumque in iis curvis alter diametri vertex G in infinitum abire ſupponitur.

Nam, quum in hac hypotheſi duæ FG, AC parallelæ fiant inter ſe; recta AX, quæ ducitur per punctum A ipſi FG æquidiſtanter, cadet ſuper AC. Quare, evaneſcente portione CX, evaneſcet pariter rectangulum BXC; & conſequenter ratio ejus rectanguli ad AX quadratum, cui in ellipſi, & hyperbola oſtenſa eſt æqualis ratio parametri ad diametrum, infinite parva prodibit.

Præterea, ſi *figura diametri conſiderari velit etiam in parabola, eam, ob infinitam diametri longitudinem, infinitæ magnitudinis eſſe, oportebit*. Plane vero infinita prodibit, ſi ex magnitudine, quam habet in ellipſi, & hyperbola, volupe ſit, illam eruere.

Enimvero in utraque earum curvarum exhi-

exhibet figuræ magnitudinem rectangulum ex FR in GS. Sed, abeunte in infinitum puncto G, altero diametri vertice, recta GS evadit infinita. Quare, quum infinitum quoque fiat rectangulum ex FR in GS; ipſa figuræ magnitudo infinita pariter evadet.

IX. Methodo non diſſimili poſſunt etiam demonſtrari duo illa theoremata, quibus *definitur in cono parameter, ad parabolæ diametrum pertinens.*

IX. Theoremata duo, pro determinanda in cono parametri longitudine, eadem methodo comprobantur.

Fig. 8. 10. 12.

Ex eo enim, quod tum in ellipſi, cum in hyperbola rectangulum ex FR in GS ſit æquale rectangulo ex FO in FG, quod conſtituit diametri figuram; erit in iiſdem curvis, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Quamquam vero utraque rectarum GS, FG infinita evadat, quotieſcumque punctum G in infinitum abire ſupponitur; ratio tamen ipſarum vertitur in eam, quam habet FR ad AR, ſive BC ad AC, eo quod fiat FG ipſi AC parallela. Unde erit in parabola, ut FO ad FR, ita FR ad AR, vel ita BC ad AB, prorſus ut ſupra.

Sed hoc idem luculentius conſequitur ex eo, quod tam in ellipſi, quam in hyperbola FO ſit ad FR, ut eſt BX ad AX. Jam enim vidimus paulo ante, quod, abeunte in infinitum puncto G, non modo FG parallela fiat ipſi AC, ſed & AX coincidat cum eadem AC. Inde igitur liquet, duas BX, AX ipſis BC, AC ſeorſim æquales evadere: & propterea, ſicuti in ellipſi, & hyperbola FO eſt ad FR, ut BX ad AX; ſic in parabola FO erit ad FR, ut eſt BC ad AC.

Quemadmodum autem, quum punctum

G in infinitum abire ſupponitur, duæ BX, AX fiunt ipſis BC, AC ſeorſim æquales; ſic in eadem hypotheſi rectangulum CBX idem fiet cum BC quadrato, & rectangulum BAX vertetur in illud, quod fit ex AB in AC. Unde, ſicuti in ellipſi, & hyperbola FO eſt ad AF, ut rectangulum CBX ad rectangulum BAX; ſic in parabola FO erit ad AF, ut eſt BC quadratum ad rectangulum BAC, prorſus etiam ut ſupra.

X. *Applicatio ejuſdem methodi ad alia duo theoremata, quæ in ellipſi, & hyperbola eundem uſum reſpiciunt.* FIG. 8. 10. 12.

X. Tam in ellipſi, quam in hyperbola, *pro determinanda parametri longitudine independenter ab ipſa diametro*, duo alia theoremata ſeſe nobis obtulere. Primum eſt, quod FO ſit ad GS, veluti eſt CX ad AX. Alterum, quod FO ſit ad AG, veluti eſt rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Jam, abeunte in infinitum puncto G, fit infinitæ longitudinis, tam recta GS, quam recta AG. Unde in parabola parameter diametri ad utramque earum rectarum rationem infinite parvam debet habere.

Plane vero, tum ratio, quam habet CX ad AX, cum ratio rectanguli BCX ad rectangulum CAX, talis evadit, ubi punctum G in infinitum abire ſupponitur. Nam in eo caſu AX coincidit cum AC; adeoque, punctis C, & X in unum coeuntibus, fit indefinitæ parvitatis, quin omnino evaneſcit, non modo recta CX, verum etiam rectangulum BCX: finitis interea manentibus, & recta AX, quæ evadit AC, & rectangulo CAX, quod vertitur in AC quadratum.

LI.

LIBER II.

De Sectionum Conicarum in Plano Deſcriptione.

SUperiore libro vidimus, quo pacto curvæ illæ, quæ conicæ ſectiones appellantur, ſuam ex cono originem trahant. Nunc, qua ratione eædem curvæ poſſint in plano deſcribi, ſequitur, ut oſtendamus. Sane Veteres non aliter, quam cono rurſus adhibito, id obtinebant. Unde earum in plano deſcriptionem, velut arduum, & difficile quidpiam, reputabant. Sed Recentiores, nullius ſolidi ope, per ſolas linearum longitudines, eas deſcribere docent. Quo fit, ut deſcriptio illarum in plano nullis hodie difficultatibus obnoxia deprehendatur.

CAP. I.

Qua ratione ellipſis in plano per conum deſcribi poſſit, oſtenditur.

I. ETſi Veteres, ad deſcribendas in plano conicas ſectiones, rurſus conum adhibuerint; rem tamen non ea *univerſalitate* tradiderunt, quæ ei ineſſe videtur.

I. *Quæ data requiruntur pro deſcriptione ſectionum conicarum.*

Ne

Ne igitur in eandem *labem* nos etiam incidamus, conabimur, curvas illas ita quidem, mediante cono, in plano deſcribere, ut ratio eas hoc pacto deſcribendi non excidat *univerſalitate* illa, quam natura ſua ſecum includit.

Quæcumque autem ſit conica ſectio, quam oportet in plano deſcribere, utique ad eam *determinandam* quatuor requiruntur. Horum prius eſt poſitio diametri. Alterum eſt ipſius longitudo, quæ ſicuti finita in ellipſi, & hyperbola, ſic in parabola infinita ſemper eſſe debet. Tertium eſt parameter ejuſdem diametri. Et quartum denique eſt poſitio ſuarum ordinatarum.

Hinc, in tradenda deſcriptione ſectionum conicarum, quatuor iſta *nota* ſemper aſſumemus. Speciatim vero, quod attinet ad poſitionem ordinatarum, exhibebimus eam per eandem illam, quam parametro concedimus; ut quæ diametri ordinatis parallela ſemper concipi debet. Unde hac ratione *determinabimus* ſectionem conicam deſcribendam, dando magnitudine, & poſitione, tam diametrum, quam parametrum ejus.

II. *Proponitur methodus deſcribendi ellipſim in plano per conum.*

FIG. 8.

II. Ut igitur *a deſcriptione ellipſis* ordiamur, dentur in plano aliquo, tum magnitudine, cum poſitione rectæ duæ FG, FO, ſibi mutuo occurentes in F. Et oporteat, in eodem plano deſcribere ellipſim, cujus FG ſit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipſi

ipſi FO parallela. Deinde ex puncto K, in quo duæ FG, DE ſeſe mutuo ſecant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis ſuper DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem unum, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta iſta FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidiſtanter ipſi GF, abſcindatur ex ea portio RZ, quæ ſit tertia proportionalis poſt duas FO, FR. Denique jungantur rectæ FZ, GR, quæ producantur, uſque donec conveniant, tam inter ſe in puncto A, quam cum recta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO, habebitur ellipſis deſcribenda.

III. Quod ellipſis, allata methodo deſcripta, quæſita conditiones adimpleat. Fig. 8.

III. Sit enim DFE ſectio, facta per tale planum in coni ejus ſuperficie. Et quoniam BC eſt diameter baſis BCD; erit triangulum BAC ex cono ſectum per axem. Unde, quum baſi ejus BC normalis ſit recta DE, in qua planum ſecans occurrit plano baſis; erit recta FG diameter ſectionis DFE: & propterea, quia eadem FG ſecat utrumque latus trianguli infra verticem coni; ipſa ſectio DFE proculdubio erit ellipſis.

Præterea in eadem ſectione DFE ordinatæ, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent eſſe parallelæ rectæ DE. Sed ex conſtructione recta DE parallela eſt rectæ FO.

Qua-

Quare eædem ordinatæ parallelæ quoque erunt ipſi FO: proindeque, ſicuti ellipſis DFE, deſcriptæ in plano rectarum FG, FO, diameter eſt recta FG, ſic ordinatæ ejus diametri parallelæ erunt rectæ FO.

Denique ex vertice coni A ducatur recta AX, ipſi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in X. Et ex ſuperius oſtenſis parameter, quæ ad deſcriptæ ellipſis diametrum refertur, erit ad FR, ut eſt BX ad AX. Sed BX eſt ad AX, ut FR ad RZ, ſive etiam ex conſtructione, ut FO ad FR. Quare erit ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipſa diametri parameter.

IV. *Ejuſdem methodi univerſalitas ex infinitate conorum, quos ſuppetit, oſtenditur.*

Fig. 8.

IV. Dubitari itaque non poteſt, quin ellipſis DFE, deſcripta in plano rectarum FG, FO methodo tradita, quæſitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus eſt recta FG; deinde diametri parameter eſt recta FO; denique eidem FO parallelæ ſunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perſpicuum eſt quoque, methodum a nobis adhibitam, pro deſcriptione ejus ellipſis, eſſe adeo *univerſalem*, ut non unum, ſed *infinitos* conos ad eum uſum exhibeat.

Nam primo planum CDE duci poteſt infinitis plane modis. Etſi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipſi FO parallela; id tamen poſitionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque ſumi poteſt in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipſius FR adhuc modis innumeris poſſit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infini-*

finitam eſſe diverſitatem conorum, quorum ope quæſitam ellipſim deſcribere licebit.

Quemadmodum autem ex poſitione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, ſic ex longitudine ipſius FR trahit angulus FGR magnitudinem ſuam. Unde, quia per quantitates iſtorum angulorum determinatur triangulum FRG; perſpicuum eſt, infinitam illam conorum diverſitatem, qui adhiberi poſſunt, ad quæſitam ellipſim deſcribendam, ex eo unice proficiſci, quod poſſit triangulum FRG infinitis plane modis variari.

V.
Cujus naturæ ſint infiniti illi coni, quos methodus præbet, aperitur.
Fig. 8.

V. Quamquam vero *infiniti* ſint coni, quibus quæſitam ellipſim deſcribere licet, ii tamen ſunt omnes *ſcaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono ſectum per axem, non conſtituit cum plano baſis angulos rectos; proculdubio conum ipſum ſcalenum eſſe oportet. Profecto autem facile erit oſtendere, triangulum BAC, ſectum ex cono per axem, non poſſe cum plano baſis BCD rectos angulos conſtituere, quum angulus GFO nequaquam eſt rectus.

Nam, quotieſcumque FO non conſtituit cum FG angulos rectos; tam ipſa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex conſtructione autem DE perpendicularis eſt ſuper BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis eſt ſectio. Quare, quum eadem DE ſit in plano BCD, nec etiam duo iſta plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt eſſe, tum *recti*,

cum

cum *ſcaleni*, quotieſcumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, conſtituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BC: proindeque, tam ipſa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, ſi triangulum BAC fuerit iſoſceles, erit axis coni rectus etiam ad planum baſis BCD; & conſequenter ipſe pariter conus erit rectus, & non ſcalenus.

VI. *Quid requiritur, ut triangulum, per axem ſectum, iſoſceles oriatur.* FIG. 8.

VI. Hinc, *ad definiendum caſum coni recti*, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu ſit opus, quo triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum neceſſe eſt, ſumere FR talis longitudinis, ut GR quadratum, adſciſcens diametri figuram, ejuſdem diametri quadratum adæquet; hoc eſt, ducta per alterum diametri verticem G recta GS, ipſi FR parallela, ut GR quadratum una cum rectangulo ex FR in GS ſit æquale quadrato, quod ſit ex diametro FG.

Ponamus enim, triangulum BAC iſoſceles eſſe. Et quoniam, completo parallelogrammo FSGP, ſit etiam iſoſceles triangulum PGR; ſecabitur baſis hujus PR bifariam a perpendiculo, quod ſuper ipſam demittitur ex puncto G: proindeque quadrata GR, FR una cum rectangulo PRF æqualia erunt quadrato ex FG. Sed quadratum ex FR una cum rectangulo PRF eſt æquale rectangulo PFR, ſive etiam ei, quod ſub ipſis FR, GS continetur. Itaque erit quadratum ex GR una cum rectangulo ex FR in GS æquale quadrato,

to, quod ſit ex diametro FG.

Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, triangulum BAC tunc demum iſoſceles eſſe poſſe, quum ratio parametri ad diametrum eſt minoris ad majus. Nam in iſto caſu figura diametri, quæ conſtituitur per rectangulum ex FO in FG, minor erit quadrato ipſius diametri FG; adeoque fieri quandoque poterit, ut GR quadratum, adſciſcens diametri figuram, ejuſdem diametri quadratum adæquet.

Nec ſane, quum iſoſceles eſt triangulum BAC, ratio parametri ad diametrum aliter eſſe poteſt. Sit enim AK axis coni. Et, ob baſim trianguli BC biſectam in K, erit rectangulum BXC minus quadrato ex KX; adeoque multo minus quadrato, quod ſit ex AX. Sed ex ſuperius oſtenſis FO eſt ad FG, ut rectangulum BXC ad AX quadratum. Itaque ratio ipſius FO ad FG erit minoris ad majus.

VII. Sit jam ratio parametri FO ad diametrum FG minoris ad majus. Et oporteat, quæſitam ellipſim ita quidem, mediante cono, in plano deſcribere, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur; rectuſque adeo ipſe conus, quotieſcumque angulus GFO ponitur rectus.

VII. Quid methodo addendum, ut triangulum, per axem ſectum, revera iſoſceles fiat.

FIG. 8.

Deſcribatur ſuper FG, velut diametro, ſemicirculus FQG; in quo aptetur recta FQ, quæ ſit media proportionalis inter FO, & FG. Jungatur deinde GQ; & arcus, deſcriptus centro G, intervalloque GQ, ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC fiat iſoſceles.

Quum enim FQ ſit media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ex FQ æqua-

quale rectangulo OFG, quod conſtituit diametri figuram. Sed quadratum ex GR, ſeu GQ una cum quadrato ex FQ eſt æquale FG quadrato. Quare idem GR quadratum, adſciſcens diametri figuram, æquale erit quadrato ejuſdem diametri: proindeque, ex mox oſtenſis, triangulum BAC iſoſceles erit.

Patet autem, triangulum BAC tunc demum iſoſceles eſſe poſſe, quum angulus GFR non eſt major angulo GFQ. Nam, exiſtente majore, perpendicularis, quæ ex puncto G demittitur ſuper FP, major itidem erit recta GQ. Quare arcus, qui deſcribitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP nequaquam occurret. Ut igitur problema ſit capax ſolutionis, neceſſe eſt, planum CDE ita quidem inclinare ad planum rectarum FG, FO, ut angulus GFR non major oriatur angulo GFQ.

Quemadmodum vero, quum angulus GFR major eſt angulo GFQ, arcus, qui deſcribitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP nequaquam occurrit; ſic idem arcus continget rectam FP in unico puncto, quum angulus GFR æqualis eſt angulo GFQ; eamque ſecabit in duobus punctis, quum viciſſim eſt minor. Unde, ſicuti problema eſt impoſſibile in primo caſu, ſic erit capax unius dumtaxat ſolutionis in ſecundo, & duarum in tertio.

VIII. *Alia methodus deſcribendi ellipſim in plano per conum in medium affertur.*

VIII. Cæterum problema principale, *de deſcribenda ellipſi in plano per conum*, poteſt etiam reſolvi in hunc modum.

Fig. 8. Nimirum, datis ut ſupra rectis FG, FO, fiat eadem conſtructio, uſque donec deventum fuerit ad punctum R, utcumque ſumendum in

in recta FP. Abſcindatur poſtea ex diametro FG, producta, ſi opus, portio FV, æqualis parametro FO. Tum juncta RV, fiat angulus GFS, æqualis angulo FRV.

Producantur deinde rectæ duæ GR, SF, uſque donec ſibi mutuo occurrant in A, cum quibus conveniat quoque recta KC in punctis B, & C. Jamque, ſi conus concipiatur, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebitur ellipſis deſcribenda per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO.

Ducatur etenim ex puncto R recta RZ, diametro GF parallela, quæ conveniat cum AF in Z. Et ſiquidem oſtendi poſſit, FO eſſe ad FR, ut eſt FR ad RZ; jam hæc alia ſolutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero oſtendetur hac ratione.

Ex conſtructione angulus GFS æqualis eſt angulo FRV. Sed, propter parallelas GF, RZ, idem angulus GFS æqualis eſt etiam angulo RZF. Quare duo anguli FRV, RZF æquales erunt inter ſe: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RZ. Eſt autem ex conſtructione FV æqualis FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut eſt FR ad RZ.

IX. *Quomodo in hac alia methodo triangulum, per axem ſectum, oriri poteſt iſoſceles.*

IX. Atque hinc rurſus patet, triangulum BAC tunc demum iſoſceles eſſe poſſe, quum parameter FO minor eſt diametro FG. Ubi enim iſoſceles eſt triangulum BAC, erit etiam iſoſceles triangulum FAR: proindeque duo an-

FIG. 8.

anguli GRF, RFS æquales erunt inter ſe. Sed ex conſtructione æquales ſunt etiam anguli FRV, GFS. Quare, ſicuti angulus RFS major eſt angulo GFS, ita quoque erit angulus GRF major angulo FRV: & propterea erit FG major, quam FV, ſeu FO.

Patet etiam, non poſſe triangulum BAC iſoſceles eſſe, niſi FR ſit talis longitudinis, ut GR quadratum, adſciſcens diametri figuram, ejuſdem diametri quadratum adæquet. Nam, quum æquales ſint, tam anguli GRF, RFS, quam anguli FRV, GFS; erit quoque angulus GRV æqualis angulo GFR. Unde, quum ſit, ut FG ad GR, ita GR ad GV; erit GR quadratum æquale rectangulo FGV.

Et quoniam ex conſtructione FO eſt æqualis FV; erit etiam rectangulum OFG, quod conſtituit diametri figuram, æquale rectangulo GFV. Quare erit GR quadratum una cum diametri figura æquale duobus rectangulis FGV, GFV. Sunt autem duo iſta rectangula æqualia quadrato ipſius diametri FG. Itaque erit GR quadratum una cum diametri figura æquale ei, quod ex ipſa diametro deſcribitur, quadrato.

Ex eo autem, quod duo anguli GRV, GFR ſint etiam æquales inter ſe, quum iſoſceles eſt triangulum BAC, alia nobis ſubnaſcitur ratio deſcribendi quæſitam ellipſim ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum, ſi abſciſſa ex diametro FG portione FV, ipſi FO æquali, deſcribatur ſuper GV portio circuli, quæ ſuſcipiat angulum, æqualem angulo GFR; quando-

doquidem portio iſta ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC iſoſceles fiat.

X.
Conus, quo deſcribitur ellipſis, quandoque in cylindrum verti poteſt
Fig. 8.

X. Sed nolim hic ſilentio præterire, quod in utraque ſolutione problematis principalis, ſi punctum R ita quidem ſumptum fuerit in recta FP, ut portio FR fiat media proportionalis inter diametrum FG, & ejus parametrum FO; tunc punctum A abeat in infinitum, propter rectas FZ, GR, quæ in iſto caſu fiunt inter ſe mutuo parallelæ.

Nam in prima ſolutione FR eſt media proportionalis inter FO, & RZ. Unde, ſemper ac eadem FR eſt quoque media proportionalis inter FO, & FG; duæ RZ, FG æquales erunt inter ſe. Sed eædem RZ, FG ſunt etiam ex conſtructione parallelæ. Quare erunt pariter æquales, & parallelæ rectæ FZ, GR, quæ illas conjungunt ad eaſdem partes: & propterea punctum A, in quo eæ conveniunt, in infinitum abibit.

In ſecunda vero ſolutione FO eſt æqualis FV. Unde, ſemper ac FR eſt media proportionalis inter FO, & FG; erit quoque, ut FV ad FR, ita FR ad FG, atque adeo angulus FRV æqualis erit angulo FGR. Ex conſtructione autem idem angulus FRV æqualis eſt etiam angulo GFS. Quare duo anguli FGR, GFS æquales erunt inter ſe: & conſequenter, quum rectæ GR, FS fiant æquidiſtantes, punctum A, in quo eæ conveniunt, in infinitum abibit.

Huc adde, quod ſi per alterum diametri verticem G ducatur recta GS, ipſi FR paralle-

la, rectangulum ex FR in GS æquale erit diametri figuræ, quæ conſtituitur per rectangulum OFG. Unde, ſemper ac FR eſt media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ejus æquale rectangulo OFG, atque adeo æquale ei, quod fit ex FR in GS. Hinc erit FR non ſolum parallela, ſed æqualis pariter ipſi GS: & propterea duæ GR, FS, quæ illas conjungunt ad eaſdem partes, erunt etiam æquales, & parallelæ.

Jam, quum punctum A abit in infinitum, *ipſe conus vertitur in cylindrum*. Unde deſcribetur quæſita ellipſis in plano, non quidem mediante *cono*, ſed adhibito *cylindro*. Et quidem ipſi Veteres norunt, ellipſim non ſolum ex cono, ſed etiam ex cylindro erui poſſe. Neſcio autem, num genuinam hujus rei rationem, quæ nobis inopinato ſeſe obtulit, exploratam habuerint. Nimirum id evenit, quia *cylindrus haberi debet tamquam conus, cujus vertex in infinita a baſi diſtantia reperitur.*

XI. *Quomodo de ſectionibus cylindricis ex iis, quæ in cono fiunt, dijudicandum.*

XI. Quod quum ita ſit, *poterit de ſectionibus cylindricis ex iis, quæ in cono fiunt, judicium ferri*. Sit ergo cylindrus BCNM duobus circulis parallelis, & æqualibus BCD, MNY utraque ex parte terminatus. Sitque etiam AK axis ipſius cylindri, hoc eſt recta, quæ eorum circulorum centra conjungit. (FIG. 13.)

Secetur primo cylindrus iſte plano, vel tranſeunte per axem AK, vel ei parallelo. Et quoniam hujuſmodi ſectio correſpondet ei, quæ in cono fit plano per verticem; orientur in ſuperficie cylindri binæ rectæ, tum inter

ſe,

ſe, cum eidem axi parallelæ; eritque adeo parallegrammum communis ſectio ipſius cylindri cum plano prædicto.

Secetur ſecundo idem cylindrus plano; quod etſi non tranſeat per axem ejus, cum illo tamen conveniat. Et quoniam ſectio iſta æquivalet ei, quæ in cono fit plano, non tranſeunte per verticem; orietur in ſuperficie cylindri linea undique curva: quæ etiam redibit in orbem, & ſpatium claudet; quum nequeat planum ſecans convenire cum axe cylindri, niſi idem planum utrinque etiam ex cylindro ipſo egrediatur.

Perinde autem, ac in cono, curva iſta erit circumferentia circuli, quotieſcumque planum ſecans baſi ipſius cylindri eſt parallelum. Et, ſi idem cylindrus ſit ſcalenus, ac ſecto ex eo parallelogrammo per axem BCNM, fuerit ei rectum, tam planum baſis BCD, quam planum ſectionis FGH, itemque angulus BCN æqualis angulo GFM, & angulus CBM æqualis angulo FGN; adhuc ſectio circulus erit, ut quæ ſectioni ſubcontrariæ coni ſcaleni correſpondet.

Per contrarium ſectio cylindri erit ſemper ellipſis, quum nec eſt baſi parallela, nec eidem ſubcontraria. Et ſiquidem planum ſecans DFE occurrat plano baſis, aut circuli æquidiſtantis BCD in recta DE, quæ ſit perpendicularis ad baſim parallelogrammi BCNM, ſecti ex cylindro per axem; erit diameter ipſius ellipſis recta FG, quæ duorum planorum BCNM, DFE communis eſt ſectio; & erunt ejus diametri ordinatæ rectæ omnes, FIG. 14.

quæ ipſi DE ſunt parallelæ.

Sit jam FO parameter diametri FG. Et adhuc per rectas, in cylindro ductas, definiri poterit ratio parametri ad diametrum. Nam, ſumpto in axe cylindri AK puncto quovis A, ſi ducatur ex eo recta AX, ipſi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in puncto X, & cum lateribus parallelogrammi BM, CN in punctis P, & Q; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad rectangulum PXQ.

Sed, ductis ex utroque diametri vertice rectis FR, GS, ipſi BC parallelis; etiam in cylindro continebunt eæ rectangulum, quod diametri figuram adæquat. Interim, quum, ratione parallelogrammi FRGS, rectæ illæ FR, GS ſint æquales, tum inter ſe, cum ipſi BC; rectangulum, ſub iiſdem contentum, idem erit, ac BC quadratum: proindeque magnitudo, quam habet in ellipſi diametri figura, exhiberi poterit in cylindro per quadratum, quod fit ex BC.

Denique, ſi fiat angulus FRV æqualis angulo BFG; portio FV, abſciſſa ex diametro FG per rectam RV, etiam in cylindro parametri longitudinem exhibebit. Nec ſilentio reticendum, quod in cylindro parallelogrammum BCNM nequeat eſſe rectangulum, niſi FR, aut ei æqualis BC, ſit talis magnitudinis, ut GR quadratum, adſciſcens diametri figuram, ejuſdem diametri quadratum adæquet.

CAP.

CAP. II.

Ratio deſcribendi hyperbolam in plano per conum, explicatur.

I. *Proponitur methodus deſcribendi hyperbolam in plano per conum.* Fig. 10.

I. OStenſo, qua ratione deſcribi poſſit ellipſis in plano per conum; videamus modo, *quo pacto per eandem conum hyperbola in plano ſit deſcribenda*. Dentur itaque in plano aliquo, tum magnitudine, cum poſitione rectæ duæ FG, FO, ſibi mutuo occurrentes in F. Et oporteat, in eodem plano deſcribere hyperbolam, cujus FG ſit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipſi FO parallela. Deinde ex puncto K, in quo duæ FG, DE ſeſe mutuo ſecant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis ſuper DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem unum, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta iſta FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidiſtanter ipſi FG, abſcindatur ex ea portio RZ, quæ ſit tertia proportionalis poſt duas FO, FR. Denique jungantur rectæ FZ, GR, quæ ſicuti ſibi mutuo occurrunt in puncto A, ſic producantur, uſque donec conveniant cum re-

ſta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO, habebitur hyperbola deſcribenda.

II. *Quod hyperbola, ea lata methodo deſcripta, quæſita conditiones adimpleat.* FIG. 10.

II. Sit enim DFE ſectio, facta per tale planum in coni ejus ſuperficie. Et quoniam BC eſt diameter baſis BCD; erit triangulum BAC ex cono ſectum per axem. Unde, quum baſi ejus BC normalis ſit recta DE, in qua planum ſecans occurrit plano baſis; erit recta FG diameter ſectionis DFE: & propterea, quia eadem FG unum quidem trianguli latus infra verticem coni, & alterum ſupra verticem ſecat, ipſa ſectio DFE erit hyperbola.

Præterea in eadem ſectione DFE ordinatæ, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent eſſe parallelæ rectæ DE. Sed ex conſtructione recta DE parallela eſt rectæ FO. Quare eædem ordinatæ parallelæ quoque erunt ipſi FO: proindeque, ſicuti hyperbolæ DFE, deſcriptæ in plano rectarum FG, FO, diameter eſt recta FG, ſic ordinatæ ejus diametri parallelæ erunt rectæ FO.

Denique ex vertice coni A ducatur recta AX, ipſi FG parallela, quæ conveniat cum BC in puncto X. Et ex ſuperius oſtenſis parameter, quæ ad deſcriptæ hyperbolæ diametrum refertur, erit ad FR, ut eſt BX ad AX. Sed BX eſt ad AX, ut FR ad RZ, ſive etiam ex conſtructione, ut FO ad FR. Quare erit

ex

ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipſa diametri parameter.

III. *Ejuſdem methodi univerſalitas ex infinitate conorum, quos ſuppetit, oſtenditur.* Fig. 10.

III. Dubitari itaque non poteſt, quin hyperbola DFE, deſcripta in plano rectarum, FG, FO methodo tradita, quæſitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus eſt recta FG; deinde diametri parameter eſt recta FO; denique eidem FO parallelæ ſunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perſpicuum eſt quoque, methodum a nobis adhibitam, pro deſcriptione ejus hyperbolæ, eſſe adeo *univerſalem*, ut non unum, ſed *infinitos* conos ad eum uſum exhibeat.

Nam primo planum CDE duci poteſt infinitis plane modis. Etſi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipſi FO parallela; id tamen poſitionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque ſumi poteſt in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipſius FR adhuc modis innumeris poſſit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infinitam* eſſe diverſitatem conorum, quorum ope quæſitam hyperbolam deſcribere licebit.

Quemadmodum autem ex poſitione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, ſic ex longitudine ipſius FR trahit angulus FGR magnitudinem ſuam. Unde, quia per quantitates iſtorum angulorum determinatur triangulum FRG; perſpicuum eſt, infinitam illam conorum diverſitatem, qui adhiberi poſſunt, ad quæſitam hyperbolam deſcribendam, ex eo unice proficiſci, quod poſſit triangulum FRG infinitis plane modis variari.

IV. Quam-

IV. *Cujus natura ſint infiniti illi coni, quos methodus præbet, aperitur.* Fig. 10.

IV. Quamquam vero *infiniti* ſint coni, quibus quæſitam hyperbolam deſcribere licet, ii tamen ſunt omnes *ſcaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono ſectum per axem, non conſtituit cum plano baſis angulos rectos; proculdubio conum ipſum ſcalenum eſſe oportet. Profecto autem facile erit oſtendere, triangulum BAC, ſectum ex cono per axem, non poſſe cum plano baſis BCD rectos angulos conſtituere, quum angulus GFO nequaquam eſt rectus.

Nam, quotieſcumque FO non conſtituit cum FG angulos rectos; tam ipſa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex conſtructione autem DE perpendicularis eſt ſuper BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis eſt ſectio. Quare, quum eadem DE ſit in plano BCD, nec etiam duo iſta plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt eſſe, tum *recti*, cum *ſcaleni*, quotieſcumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, conſtituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BC: proindeque, tam ipſa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, ſi triangulum BAC fuerit iſoſceles, erit axis coni rectus etiam ad planum baſis BCD; & conſequenter ipſe pariter conus erit rectus, & non ſcalenus.

V. *Quid requi-*

V. Hinc, *ad definiendum caſum coni recti,*

cti, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu ſit opus, quo triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum neceſſe eſt, ſumere FR talis longitudinis, ut GR quadratum ſit æquale quadrato diametri una cum ejus figura; hoc eſt, ducta per alterum diametri verticem G recta GS, ipſi FR parallela, ut GR quadratum ſit æquale quadrato ex FG una cum rectangulo ex FR in GS.

ritur, ut triangulum, per axem ſectum, iſoſceles oriatur.

FIG. 10.

Ponamus enim, triangulum BAC iſoſceles eſſe. Et quoniam, completo parallelogrammo FSGP, ſit etiam iſoſceles triangulum PGR; ſecabitur baſis hujus PR biſariam a perpendiculo, quod ſuper ipſam demittitur ex puncto G: proindeque erunt quadrata GR, FR æqualia quadrato ex FG una cum rectangulo PRF. Sed rectangulum PRF eſt æquale quadrato ex FR una cum rectangulo PFR. Quare, dempto communi quadrato ex FR, erit GR quadratum æquale quadrato ex FG una cum rectangulo PFR, hoc eſt eo, quod ſit ex FR in GS.

Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, triangulum BAC iſoſceles eſſe poſſe, non modo, quum ratio parametri ad diametrum eſt minoris ad majus, verum etiam, quum eadem illa ratio eſt viciſſim majoris ad minus. Nam in utroque caſu nihil obſtat, quominus poſſit quandoque GR quadratum æquale eſſe quadrato diametri una cum ejus figura.

VI. Oporteat jam, quæſitam hyperbolam ita quidem, mediante cono, in plano deſcribere, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur; rectuſque adeo ipſe conus, quotieſcumque

VI.
Quid methodo addendum, ut triangulum, per axem ſe-

dum, revera iſoſceles fiat. que angulus GFO ponitur rectus.

Ex puncto F erigatur ſuper FG perpendicularis FQ, quæ ſit media proportionalis inter FO, & FG. Jungatur deinde GQ; & arcus, deſcriptus centro G, intervalloque GQ, ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC fiat iſoſceles.

Fig. 10.

Quum enim FQ ſit media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ex FQ æquale rectangulo OFG, quod conſtituit diametri figuram. Sed quadratum ex GR, ſeu GQ eſt æquale FG quadrato una cum quadrato ex FQ. Quare idem GR quadratum æquale erit quadrato diametri FG una cum ejus figura; proindeque, ex mox oſtenſis, triangulum BAC iſoſceles erit.

Patet autem, triangulum BAC ſemper iſoſceles eſſe poſſe, cujuſcumque magnitudinis ſit angulus GFR. Nam, quum ſit GQ major, quam GF: arcus, qui deſcribitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP ſemper occurret. Et quia eam ſecabit ſemper in duobus punctis, hinc inde poſitis à puncto F; liquet problema duas ſemper ſolutiones admittere.

VII. *Alia methodus deſcribendi hyperbolam in plano per conum in medium affertur.*

VII. Hic etiam problema principale, *de deſcribenda hyperbola in plano per conum*, poteſt reſolvi in hunc modum.

Nimirum, datis ut ſupra rectis FG, FO, fiat eadem conſtructio, uſque donec deventum fuerit ad punctum R, utcumque ſumendum in recta FP. Producatur poſtea diameter GF uſque ad punctum V, ita ut fiat FV æqualis parametro FO. Tum juncta RV, conſtituatur angulus GFS, æqualis angulo FRV.

Fig. 10.

Con-

Conveniant porro rectæ duæ GR, FS in A, iiſdemque occurrat quoque recta KC in punctis B, & C. Jamque, ſi conus concipiatur, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebitur hyperbola deſcribenda per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO.

Ducatur etenim ex puncto R recta RZ, diametro FG parallela, quæ conveniat cum AF in Z. Et ſiquidem oſtendi poſſit, FO eſſe ad FR, ut eſt FR ad RZ; jam hæc alia ſolutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero oſtendetur hac ratione.

Ex conſtructione angulus GFS æqualis eſt angulo FRV. Sed, propter parallelas FG, RZ, idem angulus GFS æqualis eſt etiam angulo RZF. Quare duo anguli FRV, RZF æquales erunt inter ſe: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RZ. Eſt autem ex conſtructione FV æqualis ipſi FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut eſt FR ad RZ.

VIII. *Quomodo in hac alia methodo triangulum, per axem ſectum, oriri poteſt iſoſceles.*

VIII. Atque hinc rurſus patet, non poſſe triangulum BAC iſoſceles eſſe, niſi FR ſit talis longitudinis, ut GR quadratum ſit æquale quadrato diametri FG una cum ejus figura.

FIG. 10.

Ubi enim iſoſceles eſt triangulum BAC, erit etiam iſoſceles triangulum FAR; atque adeo duo anguli ARF, AFR æquales erunt inter ſe. Unde, quum æquales ſint, tam anguli GRF, RFS, quam anguli FRV, GFS; erit

erit quoque angulus GRV æqualis angulo GFR: & propterea, quum ſit, ut FG ad GR, ita GR ad GV; erit GR quadratum æquale rectangulo FGV.

Jam rectangulum FGV eſt æquale quadrato ex FG una cum rectangulo GFV. Itaque, quum, propter æquales FV, FO, rectangulum GFV ſit æquale rectangulo OFG, quod conſtituit diametri figuram; erit idem rectangulum FGV, vel ei æquale quadratum, quod fit ex GR, æquale quadrato diametri FG, una cum figura, ad eandem diametrum pertinente.

Ex eo autem, quod duo anguli GRV, GFR ſint etiam æquales inter ſe, quum iſoſceles eſt triangulum BAC; alia nobis ſubnaſcitur ratio deſcribendi quæſitam hyperbolam ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum, ſi producta diametro GF, uſque donec fiat FV æqualis FO, deſcribatur ſuper GV portio circuli, quæ ſuſcipiat angulum, æqualem angulo GFR; quandoquidem portio iſta ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC iſoſceles fiat.

IX. *Conus, quo deſcribitur hyperbola numquam in cylindrum verti poteſt.* FIG. 10.

IX. Liquet igitur, hyperbolam in plano per conum deſcribi iiſdem omnino modis, quibus præcedenti capite ellipſis deſcriptionem obtinuimus. Interim in utraque eam deſcribendi ratione fieri numquam poteſt, ut punctum A, in quo duæ rectæ FS, GR ſibi mutuo occurrunt, abeat in infinitum; *nec ideo ipſe conus, quo mediante hyperbola deſcribitur, unquam verti poterit in cylindrum.*

Nam,

Nam, quantum ad priorem attinet deſcribendi rationem, etſi juxta eam, tam pro ellipſi, quam pro hyperbola ducenda ſit per punctum R, utcumque ſumptum in FP, recta RY diametro FG æquidiſtanter, ex qua deinceps abſcindenda portio RZ talis longitudinis, ut ſit tertia proportionalis poſt duas FO, FR; perſpicuum eſt tamen, rectas FG, RZ exiſtere ad partes contrarias ipſius FR, quum agitur de deſcribenda ellipſi; & ad partem eandem ejuſdem FR, quum quæſtio eſt de deſcriptione hyperbolæ. Unde, junctis rectis FZ, GR fient eæ quadrilateri latera oppoſita in ellipſi, & ſe invicem decuſſabunt in hyperbola. FIG. 8. 10.

Quantum vero ſpectat ad alteram deſcribendi rationem, juxta eam pro ellipſi quidem abſcindenda eſt ex diametro FG portio FV, æqualis parametro FO; pro hyperbola vero producenda eſt ipſa diameter verſus F, uſque donec fiat FV æqualis FO. Et quamquam deinde pro utraque curva fieri debeat angulus GFS, æqualis angulo FRV; liquet tamen, rectam FS exiſtere ad partem alteram diametri FG relate ad rectam FR in ellipſi, & jacere inter diametrum FG, & ipſam FR in hyperbola. Unde, ducta GS æquidiſtanter eidem FR, fient rurſus GR, FS quadrilateri latera oppoſita in ellipſi, & ſe mutuo decuſſabunt in hyperbola. FIG. 8. 10.

X. Cæterum *in hyperbola deſcribenda nihil obſtat, quominus ratio parametri ad diametrum ſit etiam æqualitatis*. Et quum id contingit, adhuc iiſdem modis eam deſcribe-

X. *Quæ hyperbola dicitur æquilatera, quæq; etiam ellipſis idem nomen ſortitur.*

re

re licebit. Hujuſmodi autem hyperbola, in qua diameter parametrum ſuam adæquat, communiter a Geometris vocatur *æquilatera*. Et quamquam ellipſis quoque deſcribi poſſit diametro, & parametro, quæ habeant inter ſe rationem æqualitatis; hæc tamen non ſortitur nomen *ellipſis æquilateræ*, niſi ipſi illud etiam accedat, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos conſtituant.

Unde autem fiat, ut hyperbola vocetur æquilatera, per ſolam æqualitatem diametri cum parametro, ſed non item ellipſis; alibi quidem a nobis oſtendetur. Tantum hic obſervabimus, ellipſim æquilateram non aliam eſſe, quam ipſum circulum. Ob æqualitatem enim parametri cum diametro, erit in ea quadratum cujuſque ordinatæ æquale pariter rectangulo, quod ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continetur. Unde, quum eadem ordinata rectos cum diametro angulos conſtituat; natura ellipſis æquilateræ hæc erit, ut quadratum cujuſque diametro perpendicularis adæquet rectangulum, ſub ipſius diametri portionibus contentum.

Et ſane haud difficile erit oſtendere, ellipſim, quæ deſcribitur methodo ſuperius tradita, circulum fieri, quum æquales ponuntur rectæ FG, FO, rectuſque etiam angulus GFO, qui ſub iis rectis continetur. Jam enim, ratione anguli recti, triangulum per axem ſectum BAC rectos conſtituit angulos, tam cum plano baſis BCD, quam cum plano ſectionis DFE. Itaque, ſi oſtendi poſſit, trian-

Fig. 8.

gu-

gula duo ABC, AGF eſſe ſimilia inter ſe; ſectio, facta in cono, erit baſi ſubcontraria; atque adeo circulus, per ſuperius oſtenſa. Id vero demonſtrabitur in hunc modum.

Ex conſtructione FO eſt ad FR, ut FR ad RZ. Itaque, ſemper ac ponitur FO æqualis FG, erit etiam, ut FG ad FR, ita FR ad RZ. Hinc triangula duo GFR, FRZ habebunt circum æquales angulos latera proportionalia: proindeque in iis angulus FGR angulo RFZ erit pariter æqualis. Sed, propter parallelas FR, BC, angulus RFZ æqualis eſt angulo CBZ. Quare, quum æquales ſint anguli FGR, CBZ, duo triangula ABC, AGF æquiangula erunt, & conſequenter ſimilia inter ſe.

XI. *Sectionis ſubcontrariæ natura paullo clarius exponitur.* Fig. 8.

XI. Hinc autem *intima ratio eluceſcit, cur ſectio ſubcontraria, non ellipſim, ſed circulum nobis exhibeat*. Nimirum ellipſis abit in circulum, quum ei hæc duo contingunt. Primum, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos conſtituant. Et deinde, ut parameter æqualis fiat diametro, ad quam refertur. Jam horum utrumque præſtat ſectio ſubcontraria. Ex eo enim, quod in ipſa, tam planum ſecans, quam planum baſis rectum ſit plano trianguli, per axem ſecti; fiunt ordinatæ, diametro perpendiculares. Ex eo autem, quod per eadem illa plana abſcindantur duo triangula ſimilia; inter diametrum, & parametrum ejus æqualitas inducitur.

Unde hac occaſione notetur hoc loco velim, quod, ſicuti ordinatæ rectos ſemper cum diametro angulos conſtituunt, quotieſcum-

que planum trianguli BAC rectum eſt, tam ad planum baſis BCD, quam ad planum ſectionis DFE; ita ratio parametri FO ad diametrum FG ſit ſemper æqualitatis, quotieſcumque duo triangula ABC, AGF ſunt ſimilia inter ſe. Neque enim ea triangula poſſunt eſſe inter ſe ſimilia, niſi talia ſint quoque triangula BKF, CKG. Unde, quum ſit, ut BK ad FK, ita GK ad CK; erit rectangulum BKC æquale rectangulo FKG. Sed, propter circulum BCD, quadratum ex DK eſt æquale rectangulo BKC. Quare idem DK quadratum erit etiam æquale rectangulo FKG: & propterea, quum FO ſit ad FG, ut eſt DK quadratum ad rectangulum FKG; duæ FO, FG erunt pariter æquales inter ſe.

Oſtendi id etiam poteſt in hunc modum. Quoniam duo triangula ABC, AGF ponuntur ſimilia; erit angulus ACB æqualis angulo AFG:& propterea, quum ſint æquales duobus rectis, tam duo anguli ACB, ACX, quam duo anguli AFG, BFG; erit quoque angulus ACX æqualis angulo BFG. Sed, ob parallelas FG, AX, angulus BFG æqualis eſt angulo BAX. Itaque, quum æquales ſint etiam duo anguli ACX, BAX; erit, ut CX ad AX, ita AX ad BX: proindeque erit AX quadratum æquale rectangulo BXC. Eſt autem, ex ſuperius oſtenſis, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum. Quare duæ FO, FG pariter inter ſe æquales erunt.

Hoc idem erui quoque poteſt ex eo, quod, ſi fiat angulus FRV, æqualis angulo BFG, portio FV, abſciſſa ex diametro FG

per

per rectam RV, parametri FO longitudinem adæquet. Nam, propter ſimilitudinem triangulorum ABC, AGF, angulus ACB, ſive ARF erit æqualis angulo AFG. Unde, quum ſint æquales duobus rectis, tam duo anguli ARF, FRG, quam duo anguli AFG, BFG; erit quoque angulus FRG æqualis angulo BFG. Quo fit, ut recta RV cadat ſuper RG; atque adeo, coeuntibus in unum punctis G, & V, erit portio FV æqualis diametro FG.

C A P. III.

Parabolam in plano per conum deſcribendi ratio aperitur.

I. POſt traditam rationem deſcribendi in plano per conum, tam ellipſim, quam hyperbolam, aperienda nobis tandem eſt methodus, qua *deſcribi poſſit in plano parabola*, *eodem adhibito cono.* *I. Proponitur methodus deſcribendi parabolam in plano per conum.* FIG. 12.

Dentur itaque poſitione in plano aliquo rectæ duæ FG, FO, ſibi mutuo occurrentes in F; quarum prior FG ſit infinita verſus G, altera FO ſit etiam magnitudine data. Et oporteat, in eodem plano deſcribere parabolam, cujus FG ſit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipſi FO parallela. Deinde ex puncto K, in

quo duæ FG, DE ſeſe mutuo ſecant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis ſuper DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta iſta FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidiſtanter ipſi FG, abſcindatur ex ea portio RA, quæ ſit tertia proportionalis poſt duas FO, FR. Denique jungatur AF, & tam iſta, quam altera AR producantur, uſque donec conveniant cum recta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO, habebitur parabola deſcribenda.

II. *Quod parabola, allata methodo deſcripta, quæſita conditiones adimpleat.*

FIG. 12.

II. Sit enim DFE ſectio, facta per tale planum in coni ejus ſuperficie. Et quoniam BC eſt diameter baſis BCD; erit triangulum BAC ex cono ſectum per axem. Unde, quum baſi ejus BC normalis ſit recta DE, in qua planum ſecans occurrit plano baſis; erit recta FG diameter ſectionis DFE: & propterea, quia eadem FG uni laterum trianguli AC eſt parallela, ipſa ſectio DFE erit parabola.

Præterea in eadem ſectione DFE ordinatæ, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent eſſe parallelæ rectæ DE. Sed ex conſtructione recta DE parallela eſt rectæ FO. Quare eædem ordinatæ parallelæ quoque erunt ipſi FO: proindeque, ſicuti parabolæ DFE, deſcriptæ in plano rectarum FG, FO, diameter

eſt

eſt recta FG, ſic ordinatæ ejus diametri parallelæ erunt rectæ FO.

Denique ex ſuperius oſtenſis parameter, quæ ad deſcriptæ parabolæ diametrum refertur, erit ad FR, ut eſt BC ad AC, ſive etiam, ut eſt FR ad AR. Sed ex conſtructione FR eſt ad AR, ut FO ad FR. Quare erit ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipſa diametri parameter.

III. Ejuſdem methodi univerſalitas ex infinitate conorum, quos ſuppetit, oſtenditur.

FIG. 12.

III. Dubitari itaque non poteſt, quin parabola DFE, deſcripta in plano rectarum FG, FO methodo tradita, quæſitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus eſt recta FG; deinde diametri parameter eſt recta FO; denique eidem FO parallelæ ſunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perſpicuum eſt quoque, methodum a nobis adhibitam, pro deſcriptione ejus parabolæ, eſſe adeo *univerſalem*, ut non unum ſed *infinitos* conos ad eum uſum exhibeat.

Nam primo planum CDE duci poteſt infinitis plane modis. Etſi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipſi FO parallela; id tamen poſitionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque ſumi poteſt in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipſius FR adhuc modis innumeris poſſit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infinitam* eſſe diverſitatem conorum, quorum ope quæſitam parabolam deſcribere licebit.

Quemadmodum autem ex poſitione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, ſic ex longitudine ipſius FR trahit parallelo-

grammum FKCR latitudinem ſuam. Unde, quia idem parallelogrammum determinatur, tam per ſuam latitudinem, quam per magnitudinem anguli GFR; liquet, infinitam illam conorum diverſitatem, qui adhiberi poſſunt ad quæſitam parabolam deſcribendam, non aliunde pendere, quam ex eo, quod poſſit parallelogrammum FKCR infinitis plane modis variari.

IV. *Cujus natura ſint infiniti illi coni, quos methodus præbet, aperitur.* Fig. 12.

IV. Quamquam vero *infiniti* ſint coni, quibus quæſitum parabolam deſcribere licet, ii tamen ſunt omnes *ſcaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono ſectum per axem, non conſtituit cum plano baſis angulos rectos; proculdubio conum ipſum ſcalenum eſſe oportet. Profecto autem facile erit oſtendere, triangulum BAC, ſectum ex cono per axem, non poſſe cum plano baſis BCD rectos angulos conſtituere, quum angulus GFO nequaquam eſt rectus.

Nam, quotieſcumque FO non conſtituit cum FG angulos rectos; tam ipſa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex conſtructione autem DE perpendicularis eſt ſuper BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis eſt ſectio. Quare, quum eadem DE ſit in plano BCD, nec etiam duo iſta plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt eſſe, tum *recti*, cum *ſcaleni*; quotieſcumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, conſtituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum FG;

FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BC: proindeque, tam ipſa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, ſi triangulum BAC fuerit iſoſceles, erit axis coni rectus etiam ad planum baſis BCD; & conſequenter ipſe pariter conus erit rectus, & non ſcalenus.

V. *Quid requiritur, ut triangulum, per axem ſectum, iſoſceles oriatur.* Fig. 12.

V. Hinc, *ad definiendum caſum coni recti*, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu ſit opus, quo triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum neceſſe eſt, ſumere FR talis longitudinis, ut ſiquidem in diametro FG capiatur punctum aliquod G, & jungatur GR, ſit GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale duobus quadratis FG, FR.

Ponamus enim, triangulum BAC iſoſceles eſſe. Et quoniam, ducta GP, ipſi AF parallela, ſit etiam iſoſceles triangulum PGF; ſecabitur baſis hujus PF biſariam a perpendiculo, quod ſuper ipſam demittitur ex puncto G: proindeque GR quadratum una cum rectangulo PFR æquale erit duobus quadratis FG, FR.

Ulterius, quia parallelæ ſunt inter ſe, tam rectæ GP, AF, quam rectæ FG, RA; erit, ut PF ad FG, ita FR ad RA. Sed ex conſtructione FR eſt ad RA, ut FO ad FR. Itaque erit ex æquali, ut PF ad FG, ita FO ad FR: & propterea, quum rectangulum PFR ſit æquale rectangulo OFG; erit GR quadratum una cum rectangulo FGO æquale etiam quadratis FG, FR.

VI. *Quid me-*

VI. Oporteat jam, quæſitam parabo-

 lam

thodo addendum, ut triangulum, per axem ſectum, revera iſoſceles fiat.

lam ita quidem, mediante cono, in plano deſcribere, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur; rectuſque adeo ipſe conus, quotieſcumque angulus GFO ponitur rectus.

FIG. 12. Abſcindatur ex diametro FG portio FQ, quæ ſit æqualis dimidio parametri FO. Deinde, ſumpto in eadem diametro puncto quovis alio G, demittatur ex eo recta GT, perpendicularis ſuper FP. Et circulus, tranſiens per puncta tria T, G, Q, ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC iſoſceles fiat.

Quum enim ex conſtructione FO dupla ſit ipſius FQ; erit rectangulum OFG duplum quoque rectanguli GFQ. Sed, ob circulum, tranſeuntem per quatuor puncta T, R, G, Q, rectangulum GFQ eſt æquale rectangulo RFT. Quare idem rectangulum OFG erit duplum pariter rectanguli RFT.

Hinc, quum ſit GR quadratum una cum duplo rectanguli RFT æquale duobus quadratis FG, FR; erit etiam GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale iiſdem quadratis FG, FR: proindeque, per ea, quæ mox oſtenſa ſunt, parabola ita quidem, mediante cono, in plano deſcribetur, ut triangulum BAC iſoſceles fiet.

VII.

Alia ejuſdem methodi modificatio ad idem facilius obtinendum.

VII. Sed notetur hic velim, quod ſi jungantur puncta Q, & R per rectam QR, hæc cum diametro FG rectos angulos conſtituet. Quum enim, ratione circuli, tranſeuntis per quatuor puncta T, R, G, Q, æqualia ſint

FIG. 12. rectangula GFQ, RFT; erit, ut FG ad FT, ita FR ad FQ: proindeque angulus FTG angu-

gu-

gulo FQR æqualis erit. Sed ex conſtructione angulus FTG eſt rectus. Quare rectus erit pariter angulus FQR.

Id quum ita ſit, problema de deſcribenda in plano parabola ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur, facilius longe reſolvi poterit in hunc modum. Nimirum abſcindatur, ut antea, ex diametro FG portio FQ, quæ ſit æqualis dimidio parametri FO. Erigatur deinde ex puncto Q recta QR, eidem diametro perpendicularis. Et recta iſta QR ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC iſoſceles fiat.

Ex utraque autem conſtructione perſpicuum eſt, triangulum BAC tunc tantum iſoſceles eſſe poſſe, quum recta FP non conſtituit rectos angulos cum diametro FG. Nam, ubi rectus eſt angulus PFG, coibit primo punctum T cum puncto F; atque adeo per tria puncta T, G, Q, velut in eadem recta exiſtentia, nullus circulus tranſibit, niſi qui radium habet infinitum. Deinde vero perpendicularis, quæ ſuper diametro erigitur ex puncto Q, fiet ipſi FP parallela; neque adeo ei occurrere poterit, niſi in infinita diſtantia a puncto F.

VIII. *Quomodo hac alia methodi modificatio eruatur ex ea, qua obtinet in ellipſi.*

VIII. Non eſt tamen reticendum hoc loco, quod *poſterior propoſiti problematis conſtructio erui quoque poſſit ex ea, quam pro eodem problemate ſuperius attulimus in ellipſi.* Ibi enim, deſcripto ſuper diametro FG ſemicirculo FQG, & aptata in eo recta FQ, quæ media eſſet proportionalis inter FO, & FG; (Fig. 8.)

com-

comperiebamus punctum R ope arcus, cujus centrum eſſet punctum G, intervallum vero GQ. Sed facile erit oſtendere, iſtiuſmodi conſtructionem in eam, de qua agitur, verti, quotieſcumque punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire ſupponitur.

Si enim ex diametro FG abſcindatur portio FV, æqualis parametro FO, fiet FQ quadratum æquale rectangulo GFV. Unde quum duo quadrata FQ, GQ æqualia ſint quadrato ex FG; erit quoque quadratum ex GQ æquale rectangulo FGV: proindeque erit, ut FG ad GQ, ita GQ ad GV. Hinc, translato intervallo GQ ſuper ipſa diametro GF, cadet punctum Q inter alia duo F, & V. Quare, abeunte in infinitum puncto G, una cum ipſis FG, GV fiet etiam infinita GQ: & propterea arcus, qui deſcribitur centro G, intervalloque GQ, cum tangente ſua confundetur, & vertetur adeo in rectam, ipſi FG perpendicularem.

Hinc ſiquidem oſtendi poſſit, quod in eadem hypoteſi fiat FQ æqualis dimidio ipſius FV; jam liquido patebit, conſtructionem, quæ locum habet in parabola, eſſe eandem illam, quæ obtinet in ellipſi. Id vero demonſtrabitur hoc pacto. Quoniam FG eſt ad GQ, ut GQ ad GV; erit convertendo, ut FG ad FQ, ita GQ ad QV. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ FG, GQ ſumi poſſunt velut æquales inter ſe; quum ambæ fiant longitudinis infinitæ, manente interim finita ipſarum differentia FQ. Quare in eadem hypotheſi erunt etiam æquales rectæ duæ FQ,

QV:

QV : & propterea FQ ſemiſsis fiet ipſius FV.

IX. Præterea *eadem poſterior propoſiti problematis conſtructio erui etiam poteſt ex ea, quam pro eodem problemate ſuperius attulimus in hyperbola*. Ibi enim, erecta ſuper diametro perpendiculari FQ, quæ media eſſet proportionalis inter FO, & FG; comperiebamus punctum R ope arcus, cujus centrum eſſet punctum G, intervallum vero recta GQ. Sed facile erit oſtendere, iſtiuſmodi quoque conſtructionem in eam, de qua agitur, verti, quum punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire ſupponitur.

IX. *Quomodo eadem modificatio eruatur etiã ex illa, quæ locum habet in hyperbola.*

FIG. 10.

Si enim producatur diameter GF, uſque donec fiat FV æqualis parametro FO; erit FQ quadratum æquale rectangulo GFV. Unde, quum quadratum ex GQ ſit æquale quadratis GF, FQ; erit idem GQ quadratum æquale etiam rectangulo FGV: proindeque erit, ut GV ad GQ, ita GQ ad GF. Hinc, tranſlato intervallo GQ ſuper ipſa diametro GF, cadet punctum Q inter alia duo F, & V. Quare, abeunte in infinitum puncto G, una cum ipſis GF, GV fiet etiam infinita GQ: & propterea arcus, qui deſcribitur centro G, intervalloque GQ, cum tangente ſua confundetur, & vertetur adeo in rectam, ipſi FG perpendicularem.

Hinc, ſiquidem oſtendi poſſit, quod in eadem hypotheſi fiat FQ æqualis dimidio ipſius FV; jam liquido patebit, conſtructionem, quæ locum habet in parabola, eſſe eandem illam, quæ obtinet in hyperbola. Id vero demonſtrabitur hoc pacto. Quoniam GV

eſt

eſt ad GQ, ut GQ ad GF; erit dividendo, ut QV ad GQ, ita FQ ad GF. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ GQ, GF ſumi poſſunt velut æquales inter ſe; quum ambæ fiant longitudinis infinitæ, manente interim finita ipſarum differentia FQ. Quare in eadem hypotheſi erunt etiam æquales rectæ duæ QV, FQ: & propterea FQ ſemiſſis fiet ipſius FV.

X.

Alia methodus deſcribendi parabolam in plano per conum in medium affertur.

FIG. 12.

X. Cæterum hic quoque problema principale, *de deſcribenda parabola in plano per conum*, reſolvi poteſt hac alia ratione.

Nimirum datis, ut ſupra, rectis FG, FO, fiat eadem conſtructio, uſque donec deventum fuerit ad punctum R, utcumque ſumendum in recta FP. Abſcindatur poſtea ex diametro FG portio FV, æqualis parametro FO. Tum, juncta RV, fiat angulus GFB, æqualis angulo FRV; & agatur per punctum R recta RC, ipſi FG parallela.

Producantur deinde rectæ duæ BF, CR uſque donec ſibi mutuo occurrant in A, cum quibus conveniat quoque recta KC in punctis B, & C. Jamque, ſi conus concipiatur, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebibitur parabola deſcribenda per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO.

Plane enim, ſi oſtendi poſſit, FO eſſe ad FR, ut eſt FR ad RA; alia iſta ſolutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero oſtendetur hoc

pa-

pacto. Ex conſtructione angulus GFB æqualis eſt angulo FRV. Sed, propter parallelas FG, AC, idem angulus GFB æqualis eſt etiam angulo RAF. Quare duo anguli FRV, RAF æquales erunt inter ſe: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RA. Eſt autem ex conſtructione FV æqualis FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut eſt FR ad RA.

XI. *Quomodo in hac alla methodo triangulum, per axem ſectũ, oriri poteſt iſoſceles.* FIG. 12.

XI. Atque hinc rurſus patet, non poſſe triangulum BAC iſoſceles eſſe, niſi FR ſit talis longitudinis, ut ſumpto in diametro FG puncto quovis G, junctaque GR, ſit GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale duobus quadratis FG, FR.

Ubi enim iſoſceles eſt triangulum BAC, erit etiam iſoſceles triangulum FAR. Quare, quum æquales ſint, tam anguli CRF, RFB, quam anguli FRV, GFB; erit quoque angulus CRV æqualis angulo VFR. Sed, propter parallelas AC, FG, idem angulus CRV æqualis eſt etiam angulo RVF. Itaque duo anguli RVF, VFR æquales erunt inter ſe: & propterea, quum æqualia etiam ſint latera FR, RV, triangulum FRV iſoſceles erit.

Hinc, quum baſis hujus trianguli FV bifariam ſecetur a perpendiculo, quod ſuper ipſam demittitur ex puncto R; erit GR quadratum una cum rectangulo GFV æquale duobus quadratis FG, FR. Ob æquales autem FV, FO, rectangulum GFV eſt æquale rectangulo OFG. Itaque idem GR quadratum una cum rectangulo OFG iiſdem quadratis FG, FR pariter æquale erit.

Ex eo autem, quod duo anguli RVF, VFR

VFR ſint etiam æquales inter ſe, quum iſoſceles eſt triangulum BAC; alia nobis ſubnaſcitur ratio deſcribendi quæſitam parabolam ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC iſoſceles oriatur. Nimirum, ſi abſciſſa ex diametro FG portione FV, ipſi FO æquali; fiat ad punctum V angulus FVR, æqualis angulo VFR; quandoquidem recta VR ſignabit in FP punctum illud R, quo opus eſt, ut triangulum BAC iſoſceles fiat.

XII. *Eadem conſtructio ex ea, qua in ellipſi, & hyperbola obtinet, derivatur.*

XII. Nec ſilentio præteribimus, quod *iſta etiam conſtructio prono alveo fluat ex ea, qua in ellipſi, & hyperbola hoc idem ſuperius obtinuimus*. In iis etenim curvis ſumpta quoque ſuper diametro FG portione FV, quæ

Fig. 8. 10. æqualis eſſet parametro FO, comperiebamus punctum R, deſcribendo ſuper GV circuli portionem, quæ ſuſciperet angulum, æqualem angulo GFR. Sed facile erit oſtendere, iſtiuſmodi conſtructionem in eam, de qua agitur, verti, quotieſcumque punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire ſupponitur.

Si enim rectam intelligamus, quæ eam circuli portionem tangat in V, & ad eandem cum illa plagam dirigatur; ea continebit cum FV angulum, æqualem angulo VFR. Unde, quia, abeunte in infinitum puncto G, fit ipſa GV infinitæ longitudinis, atque adeo infinita quoque diameter, quæ ad eam circuli portionem refertur; confundetur ipſa circuli portio cum tangente ſua, & conſequenter vertetur in rectam, conſtituentem cum FV angulum, æqualem angulo VFR: proindeque in eadem hypotheſi invenietur punctum R, ſi fiat ad

pun-

punctum V angulus FVR, qui ſit æqualis angulo VFR.

XIII. Conus, quo deſcribitur parabola, numquam in cylindrum verti poteſt.

XIII. Iiſdem itaque modis, quibus ellipſis, & hyperbolæ in plano per conum deſcriptionem obtinuimus, deſcribitur quoque parabola. Sed punctum A, in quo rectæ duæ BF, CR ſibi mutuo occurrunt, hic etiam, numquam in infinitum abire poteſt. Unde *ipſe pariter conus, quo mediante parabola deſcribitur, non ſecus ac in hyperbola, numquam verti poterit in cylindrum.* Fig. 12.

Cylindri igitur ope tantum ellipſis deſcribi poteſt. Et quamquam parabola, velut ſpecies quædam ellipſis, haberi queat; inde tamen non ſequitur, parabolam quoque per cylindrum poſſe deſcribi. Nam meminiſſe oportet, quod conus, quo deſcribitur ellipſis, tunc quidem vertatur in cylindrum, quotieſcumque punctum R ſubinde ſumitur in recta FP, ut portio FR ſit media proportionalis inter diametrum FG, & ejus parametrum FO. Fig. 8.

Quum enim in parabola diameter FG ſit infinitæ longitudinis, utique media proportionalis inter ipſam, & ejus parametrum finita eſſe non poteſt. Quare, ubicumque ſumetur in recta FP punctum R, ſemper intercepta portio FR, velut finita, minor erit linea illa, quæ media foret proportionalis inter FG, & FO: proindeque, quum quæſtio erit de deſcribenda parabola, perinde ac quum agitur de deſcriptione hyperbolæ, numquam fieri poterit, ut conus abeat in cylindrum. Fig. 12.

CAP.

C A P. IV.

Qua ratione ellipſis in plano per ſolas rectas deſcribi poſſit, demonſtratur.

I. *Proponitur ratio deſcribendi ellipſim in plano per rectas ſolas.* Fig. 15.

I. **V**Idimus huc uſque, quo pacto deſcribendæ ſint in plano conicæ ſectiones, adhibendo rurſus ſolidum illud, ex quo eæ trahunt originem ſuam. Nunc, qua ratione eædem curvæ deſcribi poſſint in plano, per ſolas linearum longitudines, oſtendendum nobis erit. Ut autem *a deſcriptione ellipſis* iterum ordiamur, dentur in plano aliquo, tum magnitudine, cum poſitione, rectæ duæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A. Et oporteat, in eodem plano deſcribere ellipſim, cujus AB ſit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

Ducatur per punctum D recta DE, ipſi AB parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, BZ, quæ revolvantur circa puncta A, & B in ipſo plano rectarum AB, AD. Fiat autem earum revolutio hac lege, ut portio DF, abſciſſa ex DE per priorem AX, ſit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta ſi opus, abſcindit eodem tempore recta altera BZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD deſcribitur continuis interſectionibus ipſarum

AX,

AX, BZ, ellipſim, quam quærimus, eſſe.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ conveniat cum AB in puncto N. Jamque erit punctum M in quæſita ellipſi, ſi utique oſtendi poſſit, MN quadratum eſſe ad rectangulum ANB, ut eſt AD ad AB. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad NB; ſive etiam in ratione compoſita ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

II. *Monita pro allata ellipſis deſcriptione melius intelligenda.* FIG. 15.

II. Non ergo dubitari poteſt, quin mutuis interſectionibus rectarum AX, BZ deſcribatur ellipſis, quam quærimus. Interim, ut *deſcriptio ejus melius intelligatur*, notandum eſt primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD verſus AB; tunc recta altera BZ ferri debeat circulari etiam motu ex BA verſus BI, quam ipſi AD ſuppono parallelam. Et quoniam revolutio harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per ipſas ex rectis DE, AD, ſint perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod ubi recta AX pervenit ad AB, & infinitam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc recta altera BZ ſuper BI reperiatur, quia hac ratione ipſa quoque ex AD infinitam portionem abſcindet.

Notandum eſt etiam, quod quotieſcumque

que eadem AX pergit moveri circulariter ex AB verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc recta altera BZ proſequi debeat motum ſuum circularem ex BI verſus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege perfici debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, ex altera parte productis, maneant ſemper æquales inter ſe: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc altera BZ ſuper BR reperiatur, quia hac ratione ipſa etiam ex AD nullam portionem abſcindet.

III. *Figura ellipſis ex ablata ejus deſcriptione deducitur.*

III. Atque hinc luce clarius apparet, *ellipſim conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis*, quæ junguntur ſimul in utroque vertice ejuſdem diametri.

FIG. 15. Una ſiquidem deſcribitur, quum recta AX fertur circulariter ex AD verſus AB, eaque continetur in angulo BAD. Altera deſcribitur, quum eadem AX moveri pergit ex AB verſus AH, & pars iſta continetur in angulo BAH. Nec ſane, continuando motum ejuſdem rectæ AX, uſque donec circumferentiam integram abſolvat, aliæ ei partes addi poſſunt.

Nam primo, quotieſcumque recta AX fertur ex AH verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc altera BZ proſequetur motum ſuum ex BR verſus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, quum fiant earundem rectarum interſectiones in angulo BAD; deſcribetur eadem ellipſis portio, quæ in angulo illo continetur. Et ſecun-

cundo, ubi eadem recta AX fertur ex AK verſus AD, tunc altera BZ moveri perget ex BL verſus BA. Unde, quum earundem rectarum interſectiones fiant in angulo BAH; deſcribetur ellipſis portio illa, quæ eo in angulo continetur.

IV. *Proprietas ellipſis, quæ ex adducta ejus deſcriptione conſequitur.* FIG. 15.

IV. Ex allata autem ellipſis deſcriptione perſpicuum eſt, *ei id quidem contingere*, ut ſi per aliquod ejus punctum M ducantur ex diametri verticibus A, & B rectæ duæ AX, BZ; portiones DF, AG, quas ipſæ abſcindunt ex rectis DE, AD, productis ſi opus, ſint ſemper æquales inter ſe. Sed, ſi eædem AX, BZ protrahantur, uſque donec conveniant cum rectis BI, IE, ſimiliter ſi opus productis, in punctis O, & Q; erunt etiam æquales portiones BO, IQ.

Quum enim æquales ſint inter ſe, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed, ob triangula æquiangula ADF, ABO, AD eſt ad DF, ut eſt BO ad AB; itemque, ob triangula æquiangula BIQ, BAG, BI eſt ad AG, ut eſt IQ ad AB. Itaque erit ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter ſe.

Hinc, per interſectionem rectarum AX, BZ, deſcribetur quæſita ellipſis, non ſolum, quum rectæ illæ ſubinde revolvuntur circa puncta A, & B, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex rectis DE, AD, productis ſi opus, ſint perpetuo æquales inter ſe; verum etiam, quum ſuas circa puncta illa revolutiones ſubinde perficiunt, ut ſint æquales por-

tiones BO, IQ, quas abſcindunt ex rectis BI, IE, ſimiliter ſi opus productis.

V. *Præcedentis proprietatis ſpeciale quoddam accidens adnotatur.* FIG. 15.

V. Etſi autem æquales ſint inter ſe, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ: perſpicuum eſt tamen, *minui quidem iſtas, quum ea augentur; & per contrarium augeri, quum illæ minuuntur*. Sed, tam *incrementum*, quam *decrementum* ſit ſemper *ea lege*, ut rectangulum ex una illarum DF in unam iſtarum BO exhibeat ubique magnitudinem figuræ ipſius diametri AB. Nam, ob triangula æquiangula ADF, ABO, ut eſt AD ad DF, ita eſt BO ad AB; proindeque rectangulum ex DF in BO æquale erit rectangulo ex AD in DB, quod ex ſuperius dictis conſtituit diametri figuram.

Hinc, quotieſcumque æquales ſunt inter ſe omnes quatuor portiones DF, AG, BO, IQ, neceſſe eſt, ut unaquæque ipſarum media evadat proportionalis inter diametrum AB, & ejus parametrum AD; atque adeo, ut cujuſque quadratum æquale fiat rectangulo BAD. Id vero contingit, quum illud ellipſeos punctum deſcribitur, ad quod pertinet ordinata, quæ bifariam dividit diametrum AB; hoc eſt, quum duæ AN, NB æquales ſiunt inter ſe.

Ubi enim duæ AN, NB inter ſe ſunt æquales, erit ut AN ad MN, ita NB ad candem MN. Sed, ob triangula æquiangula ANM, ABO, AN eſt ad MN, ut AB ad BO; pariterque, ob triangula æquiangula BNM, BAG, NB eſt ad MN, ut AB ad AG. Itaque erit ex æquali, ut AB ad BO, ita AB

ad

ad AG : & propterea duæ AG, BO æquales erunt inter ſe.

VI. Id quum ita ſit, *juvat hic advertere*, quod etſi in deſcribenda ellipſi revolutio rectarum AX, BZ temperari poſſit, tam æqualitate portionum DF, AG, quam æqualitate portionum BO, IQ; conſultius ſit, tamen, adhibere æqualitatem illarum, quum deſcribi debet portio ellipſis, quæ refertur ad ſemiſſem diametri ſuperiorem; & viciſſim æqualitatem iſtarum, quum per contrarium deſcribenda eſt portio altera, quæ diametri ſemiſſem alium inferiorem reſpicit.

VI. *Quid peragendum, ut integra ellipſis deſcriptio haberi poſſit.*

FIG. 15.

Quantum enim ad portiones DF, AG; eæ, ſicuti nullius magnitudinis ſunt in vertice A, ita in receſſu ab illo vertice majores ſemper, ac majores fiunt, tandemque infinitæ evadunt in vertice altero B. Quare integra ellipſis numquam deſcribi poſſet, ſi revolutio rectarum AX, BZ æqualitate earum portionum ſemper eſſet temperanda.

Quantum vero ad portiones BO, IQ; iſtæ per contrarium nullius omnino magnitudinis ſunt in vertice B, tum in receſſu a vertice iſto majores ſemper, ac majores fiunt, tandemque in vertice altero A infinitæ deprehenduntur. Unde integram ellipſim nunquam adhuc deſcribere liceret, ſi ipſarum æqualitate revolutionem rectarum AX, BZ dirigere ſemper oporteret.

Quocirca, ut integræ ellipſis deſcriptio haberi poſſit, præſtat, partem ejus ſuperiorem deſcribere æqualitate portionum DF, AG; & partem inferiorem æqualitate portio-

num BO, IQ. Et, ut idem ſit terminus incrementi, tam illarum, quam iſtarum, ſejungi poterit pars ellipſis ſuperior ab inferiore per ordinatam, quæ biſecat diametrum AB.

VII. *Quomodo, data diametro cum poſitione ſuarum ordinatarum, determinari poteſt longitudo parametri.* FIG. 15.

VII. Ex eo porro, quod æquales ſint inter ſe, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ, *plura poſſunt obtineri, aliquem fortaſſe uſum deinceps habitura.*

Nimirum primo *determinari poteſt longitudo parametri*, quotieſcumque una cum ellipſi data eſt, tam diameter AB, quam poſitio ſuarum ordinatarum.

Sit enim AD, vel BI recta illa, cui omnes diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Et ſumpto in ellipſi puncto quovis M, agantur per illud ex verticibus diametri A, & B rectæ AX, BZ, quæ cum ipſis AD, BI conveniant in punctis G, & O.

Abſcindatur deinde ex AB, utrinque producta ſi opus, vel portio AS, æqualis ipſi AG; vel portio BT, æqualis ipſi BO. Et parametri longitudinem exhibebit, tam recta SF, parallela rectæ AD, & terminata ad rectam AX; quam recta TQ, parallela eidem AD, & terminata ad rectam BZ.

VIII. *Quomodo definiri poteſt punctum, in quo recta, ex uno vertice ducta, ſecat ellipſim.* FIG. 15.

VIII. Secundo *definiri poteſt punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat ellipſim. Nimirum, ſi ex vertice altero B ducatur recta BZ, quæ abſcindat, vel ex AD portionem AG, æqualem ipſi DF; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipſi BO. Nam interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit.

Hinc, ſiquidem recta AX cadat ſuper AD,

AD, quæ ducta eſt per verticem A diametri ordinatis æquidiſtanter; continget ea ellipſim in ſolo puncto A. Nam in iſto caſu DF quidem evaneſcit, BO vero fit infinita. Quare, ut etiam evaneſcat AG, & infinita fiat IQ, ducenda erit recta altera BZ per ipſum verticem A.

Per contrarium vero, quotieſcumque recta AX angulum conſtituit cum AD, tunc ea non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecabit ellipſim. Nam, ratione ejus anguli, eſt finitæ magnitudinis, tam portio DF, quam portio BO: proindeque recta altera BZ per ipſum verticem A tranſire non poterit.

Inde autem conſequitur, quod ſi in plano deſcriptæ ellipſis detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela diametri ordinatis, ſemper ex vertice A duci poſſit recta alia, quæ ei parallela, ſecet ellipſim in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum conſtituat cum AD.

IX. Denique *determinari poteſt punctum,* in quo recta BZ, ducta ex vertice B, ſecat ellipſim. Nimirum, ſi ex vertice altero A ducatur recta AX, quæ abſcindat, vel ex DE portionem DF, æqualem ipſi AG; vel ex BI portionem BO, æqualem ipſi IQ. Nam interſectio rectarum BZ, AX quæſitum punctum exhibebit.

IX. *Quomodo determinari poteſt punctum, in quo recta, ex vertice alio ducta, ſecat ellipſim.* Fig. 15.

Hinc, ſiquidem recta BZ cadat ſuper BI, quæ ducta eſt per verticem B diametri ordinatis æquidiſtanter; continget ea ellipſim in ſolo puncto B. Nam in iſto caſu AG quidem fit infinita, IQ vero evaneſcit. Quare, ut

etiam infinita fiat DF, & BO evaneſcat, ducenda erit recta altera AX per ipſum verticem B.

Per contrarium vero, quotieſcumque recta BZ angulum conſtituit cum BI, tunc non ſolum in B, ſed in alio quoque puncto ea ſecabit ellipſim. Nam, ratione ejus anguli, eſt finitæ magnitudinis, tam portio AG, quam portio IQ: proindeque recta altera AX per ipſum verticem B duci non poterit.

Huic autem conſequens eſt, quod ſi in plano deſcriptæ ellipſis detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela diametri ordinatis, ſemper ex vertice B duci poſſit recta alia, quæ ei parallela, ellipſim ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum conſtituat cum BI.

X.

Ellipſis per ſolas rectarum longitudines deſcriptio altera paulo ſpecialis.

FIG. 16.

X. Cæterum haud quidem putandum eſt, ellipſim in plano *per ſolas rectarum longitudines* dumtaxat *expoſita ratione* poſſe deſcribi. Vix enim ulla eſt ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam deſcribendi modus nobis non ſubnaſcitur. Quin ſæpe ex eadem proprietate poſſunt etiam *plures* derivari.

Ita, ſi angulus BAD, quem conſtituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; atque adeo diameter AB major paramemetro AD: ope ejuſdem illius proprietatis quæ ellipſi competit relate ad diametrum, poterit etiam quæſita ellipſis deſcribi in hunc alium modum.

Extendatur diameter BA uſque ad H, ita ut AH ſit ad BH, veluti eſt AD ad AB. Deinde, erecta ſuper BH perpendiculari HL,

re-

revolvatur, tum circa verticem A angulus rectus XAY, cum circa verticem alterum B recta BZ.

Fiat porro utriuſque revolutio ea lege, ut interſectio rectæ BZ cum latere anguli AY contingat ſemper ſuper recta HL. Et interſectio ejuſdem rectæ BZ cum latere altero AX optatam ellipſim in plano delineabit.

XI. *Demonſtratio alterius hujus rationis, qua deſcribi poteſt ellipſis.* FIG. 16.

XI. Nec ſane difficile erit, *hujus rei veritatem oſtendere*. Ex aliquo enim interſectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum ſit ei perpendicularis, parallela erit ipſi HL: & conſequenter duo triangula BNM, BHL æquiangula erunt.

Et quoniam rectus eſt uterque angulorum BAD, XAY; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAX, erit etiam angulus BAX æqualis angulo DAY, ſive ALH: & propterea duo triangula MNA, AHL etiam æquiangula erunt.

Ulterius MN quadratum eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad NB. Sed MN eſt ad AN, ut AH ad HL; itemque MN eſt ad NB, ut HL ad BH. Quare erit MN quadratum ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex AH ad HL, & ex HL ad BH.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AH ad BH. Unde erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AH ad BH. Sed ex conſtructione AH eſt ad BH, ut AD ad AB. Et igitur erit rurſus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

XII. Diſ-

XII.
Quod altera iſta ellipſim deſcribendi ratio recidat in priorem paulo generaliorem.
FIG. 16.

XII. Diſſimulandum autem hoc loco non eſt, quod *alter iſte ellipſim deſcribendi modus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus*. Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro AB parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit oſtendere, portionem DF æqualem eſſe portioni AG, quam abſcindit ex AD, producta ſi opus, recta BZ.

Quum enim rectus ſit uterque angulorum XAY, DAH; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Hinc, quum ſit BH ad HL in ratione compoſita ex BH ad AH, & ex AH ad HL; habebit quoque BH ad HL rationem compoſitam ex BH ad AH, & ex AD ad DF. Sed ex conſtructione BH eſt ad AH, ut AB ad AD. Quare erit rurſus BH ad HL in ratione compoſita ex AB ad AD, & ex AD ad DF.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AB ad DF. Unde erit ex æquali, ut BH ad HL, ita AB ad DF. Sed BH eſt ad HL, ut AB ad AG. Itaque erit rurſus ex æquali, ut AB ad DF, ita AB ad AG: & propterea duæ portiones DF, AG æquales erunt inter ſe.

CAP. V.

Ratio deſcribendi hyperbolam in plano per rectas ſolas explicatur.

I. TRadita ratione deſcribendi ellipſim in plano per ſolas rectarum longitudines, *ad hyperbolam eodem pacto deſcribendam* gradum nunc facimus. Dentur itaque in plano aliquo, tum magnitudine, cum poſitione, rectæ duæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A. Et oporteat, in eodem plano deſcribere hyperbolam, cujus AB ſit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

I. *Proponitur ratio deſcribendi hyperbolam in plano per rectas ſolas.* FIG. 17.

Ducatur per punctum D recta DE, ipſi BA parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, BZ, quæ revolvantur circa puncta A, & B in ipſo plano rectarum AB, AD. Fiat autem earum revolutio hac lege, ut portio DF, abſciſſa ex DE per priorem AX, ſit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta ſi opus, abſcindit eodem tempore recta altera BZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD deſcribitur continuis interſectionibus ipſarum AX, BZ, hyperbolam, quam quærimus, eſſe.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ

con-

conveniat cum AB, producta, in puncto N. Jamque erit punctum M in quæſita hyperbola, ſi utique oſtendi poſſit, MN quadratum eſſe ad rectangulum ANB, ut eſt AD ad AB. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad NB; ſive etiam in ratione compoſita ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

II. *Monita pro allata hyperbola deſcriptione melius intelligenda.* FIG. 17.

II. Non ergo dubitari poteſt, quin mutuis interſectionibus rectarum AX, BZ deſcribatur hyperbola, quam quærimus. Interim, ut *deſcriptio ejus melius intelligatur*, notandum eſt primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc recta altera BZ ferri debeat circulari etiam motu ex BA verſus BI, quam parametro BD ſuppono parallelam. Et quoniam revolutio harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per ipſas ex rectis DE, AD, ſint perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod ubi recta AX pervenit ad AK, & infinitam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc altera BZ ſuper BI reperiatur, quia hac ratione ipſa pariter ex AD infinitam portionem abſcindet.

Notandum eſt etiam, quod quotieſcumque eadem AX pergit moveri circulariter ex AK verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc recta altera BZ proſequi de-

debeat motum ſuum circularem ex BI verſus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege fieri debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, ex altera parte productis, maneant ſemper æquales inter ſe: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc altera BZ ſuper BR reperiatur, quia hac ratione ipſa etiam ex AD nullam portionem abſcindet.

III. Figura hyperbolæ ex allata ejus deſcriptione deducitur.

III. Atque hinc luce clarius apparet, *hyperbolam conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis*, quæ ſimul junguntur in vertice A; *eique aliam opponi, duabus itidem ex partibus conſtantem*, quarum unio contingit in vertice altero B. Ubi enim recta AX fertur circulariter ex AD verſus AK, deſcribitur, primo hyperbolæ principalis pars illa, quæ exiſtit in angulo DAK; tum ea hyperbolæ oppoſitæ, quæ jacet in angulo LBR. Quotieſcumque vero eadem AX pergit moveri ex AK verſus AH, primo quidem deſcribitur pars illa hyperbolæ oppoſitæ, quæ continetur in angulo IBR; tum ea hyperbolæ principalis, quæ in angulo HAK reperitur. FIG. 17.

Verum quidem eſt, quod motus rectæ AX continuari poſſit, uſque donec integram circumvolutionem abſolvat. Sed, continuando ſubinde ejus rectæ motum, haud novæ partes utrique hyperbolarum adduntur. Nam primo, quotieſcumque recta AX fertur ex AH verſus AB; tunc altera BZ proſequetur mo-

motum ſuum ex BR verſus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, quum fiant earum rectarum interſectiones, primo quidem in angulo DAK, tum in angulo LBR; deſcribentur eædem utriuſque hyperbolæ portiones, quæ in angulis illis continentur. Et ſecundo, ubi eadem recta AX fertur ex AB verſus AD; tunc altera BZ pergit moveri ex BL verſus BA. Unde, quum earundem rectarum interſectiones fiant, primo quidem in angulo IBR, deinde vero in angulo HAK; deſcribentur utriuſque hyperbolæ portiones illæ, quæ in iiſdem angulis exiſtunt.

IV. *Proprietas hyperbolæ, quæ ex adducta ejus deſcriptione conſequitur.*

FIG. 17.

IV. Ex allata autem hyperbolæ deſcriptione perſpicuum eſt, *ei id quidem contingere*, ut ſi per aliquod ejus punctum M ducantur ex diametri verticibus A, & B rectæ duæ AX, BZ; portiones DF, AG, quas ipſæ abſcindunt ex rectis DE, AD, productis ſi opus, ſint ſemper æquales inter ſe. Sed, ſi eædem AX, BZ protrahantur, uſque donec conveniant cum rectis BL, IE, ſimiliter ſi opus productis, in punctis O, & Q; erunt etiam æquales portiones BO, IQ.

Quum enim æquales ſint inter ſe, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit, ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed, ob triangula æquiangula ADF, ABO, AD eſt ad DF, ut eſt BO ad AB; itemque, ob triangula æquiangula BIQ, BAG, BI eſt ad AG, ut eſt IQ ad AB. Itaque erit ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter ſe.

Hinc, per interſectionem rectarum AX, BZ

BZ deſcribetur quæſita hyperbola, non ſolum, quum rectæ illæ ſubinde revolvuntur circa puncta A, & B, ut portiones DF, AG quas abſcindunt ex rectis DE, AD, productis ſi opus, ſint perpetuo æquales inter ſe; verum etiam, quum ſuas circa puncta illa revolutiones ſubinde perficiunt, ut ſint æquales portiones BO, IQ, quas abſcindunt ex rectis BL, IE, ſimiliter ſi opus productis.

V.
Præcedentis proprietatis ſpeciale quoddam accidens adnotatur.

FIG. 17.

V. Etſi autem æquales ſint inter ſe, tam portiones DF, AG; quam portiones BO, IQ: perſpicuum eſt tamen, *mimui quidem iſtas, quum eæ augentur; & per contrarium augeri, quum eæ minuuntur*. Sed, tam *incrementum*, quam *decrementum* ſit ſemper *ea lege*, ut rectangulum ex una illarum DF in unam iſtarum BO exhibeat ubique magnitudinem figuræ ipſius diametri AB. Nam, ob triangula æquiangula ADF, ABO, ut eſt AD ad DF, ita eſt BO ad AB: proindeque rectangulum ex DF in BO æquale erit rectangulo ex AD in DB, quod ex ſuperius dictis conſtituit diametri figuram.

FIG. 18.

Hinc, quotieſcumque æquales fiunt inter ſe omnes quatuor portiones DF, AG, BO, IQ, neceſſe eſt, ut unaquæque ipſarum media evadat proportionalis inter diametrum AB, & ejus parametrum AD; atque adeo, ut cujuſque quadratum æquale fiat rectangulo BAD. Id vero contingit, quum rectæ duæ AX, BZ parallelæ fiunt inter ſe; & conſequenter, ubi earum interſectio in infinitum abire ſupponitur.

Ubi enim punctum M abit in infinitum, tunc

tunc duæ AN, NB æquales fiunt inter ſe; quum utraque infinita evadat, manente interim finita ipſarum differentia AB: proindeque erit, ut AN ad MN, ita NB ad eandem MN. Sed, ob triangula æquiangula ANM, ABO, AN eſt ad MN, ut AB ad BO; itemque, ob triangula æquiangula BNM, BAG, NB eſt ad MN, ut AB ad AG. Itaque erit ex æquali, ut AB ad BO, ita AB ad AG: & propterea duæ AG, BO æquales erunt inter ſe.

VI. *Quid peragendum, ut totius hyperbolæ deſcriptio haberi poſſit.*

Fig. 17.

VI. Id quum ita ſit, *juvat hic advertere*, quod etſi in deſcribenda hyperbola revolutio rectarum AX, BZ temperari poſſit, tam æqualitate portionum DF, AG, quam æqualitate portionum BO, IQ; conſultius ſit tamen, adhibere æqualitatem illarum, quum deſcribi debet hyperbola inferior, quæ tranſit per verticem A; & viciſſim æqualitatem iſtarum, quum hyperbola ſuperior, quæ traducitur per verticem B, eſt deſcribenda.

Quantum enim ad portiones DF, AG; eæ, ſicuti nullius magnitudinis ſunt in vertice A, ita in receſſu a vertice illo majores ſemper, ac majores fiunt, tandemque infinitæ evadunt in vertice altero B. Quare integra hyperbola, quæ ex principali, & oppoſita conſtat, numquam deſcribi poſset, ſi revolutio rectarum AX, BZ æqualitate earum portionum eſſet ſemper temperanda.

Quantum vero ad portiones BO, IQ; iſtæ per contrarium nullius magnitudinis ſunt in vertice B, tum in receſſu a vertice iſto majores ſemper, ac majores fiunt, tandemque in vertice altero A infinitæ deprehenduntur.

tur. Unde integram hyperbolam numquam adhuc deſcribere liceret, ſi ipſarum æqualitate revolutionem rectarum AX, BZ dirigere ſemper oporteret.

Quocirca, ut integræ hyperbolæ deſcriptio haberi poſſit, præſtat, prius quidem adhibere æqualitatem portionum DF, AG; tum deinde æqualitatem portionum BO, IQ in ſubſidium advocare. Et, ut idem ſit terminus incrementi, tam illarum, quam iſtarum; deſcribi poterit æqualitate priorum hyperbola principalis, quæ tranſit per verticem A; & æqualitate poſteriorum hyperbola oppoſita, quæ tranſit per verticem alterum B.

VII. *Quomodo, data diametro cum poſitione ſuarum ordinatarum, determinari poteſt longitudo parametri.* FIG. 17.

VII. Ex eo porro, quod æquales ſint inter ſe, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ, *plura poſſunt obtineri, aliquem fortaſſe uſum deinceps habitura.*

Nimirum primo *determinari poteſt longitudo parametri*, quotieſcumque una cum hyperbola data eſt, tam diameter AB, quam poſitio ſuarum ordinatarum.

Sit enim AD, vel BL recta illa, cui omnes diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Et, ſumpto in hyperbola puncto quovis M, agantur per illud ex verticibus diametri A, & B rectæ AX, BZ, quæ cum ipſis AD, BL conveniant in punctis G, & O.

Abſcindatur deinde ex AB, utrinque producta, vel portio AS, æqualis ipſi AG, vel portio BT, æqualis ipſi BO. Et parametri longitudinem exhibebit, tam recta SF, parallela rectæ AD, & terminata ad rectam AX; quam recta TQ, parallela eidem

AD, & terminata ad rectam BZ.

VIII. *Quomodo definiri poteſt punctum, in quo recta, ex uno vertice ducta, ſecat hyperbolam.* FIG. 17.

VIII. Secundo *definiri poteſt punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat hyperbolam. Nimirum, ſi ex vertice altero B ducatur recta BZ, quæ abſcindat, vel ex AD portionem AG, æqualem ipſi DF; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipſi BO. Nam interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit.

Hinc, ſiquidem recta AX cadat ſuper AD, quæ ducta eſt per verticem A diametri ordinatis æquidiſtanter, continget ea hyperbolam in ſolo puncto A. Nam in iſto caſu DF quidem évaneſcit, BO vero fit infinita. Quare, ut etiam evaneſcat AG, & infinita fiat IQ, ducenda erit recta altera BZ per ipſum verticem A.

Per contrarium vero, quotieſcumque recta AX angulum conſtituit cum AD, tunc ea non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecabit hyperbolam. Nam, ratione ejus anguli, eſt finitæ magnitudinis, tam portio DF, quam portio BO: proindeque recta altera BZ per ipſum verticem A tranſire non poterit.

Inde autem conſequitur, quod ſi in plano deſcriptæ hyperbolæ detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela diametri ordinatis, ſemper ex vertice A duci poſſit recta alia, quæ ei parallela, ſecet hyperbolam in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum conſtituat cum AD.

IX. *Quomodo determinari poteſt punctum, in quo recta, ve*

IX. Denique *determinari poteſt punctum*, in quo recta BZ, ducta ex vertice B, ſecat hyperbolam. Nimirum, ſi ex vertice altero A du-

ducatur recta AX, quæ abſcindat, vel ex DE portionem DF, æqualem ipſi AG; vel ex BL portionem BO, æqualem ipſi IQ. Nam interſectio rectarum BZ, AX quæſitum punctum exhibebit.

vertice alio ducta, hyperbolam ſecat. FIG. 17.

Hinc, ſiquidem recta BZ cadat ſuper BL, quæ ducta eſt per verticem B diametri ordinatis æquidiſtanter; continget ea hyperbolam in ſolo puncto B. Nam in iſto caſu AG quidem fit infinita, IQ vero evaneſcit. Quare, ut etiam infinita fiat DF, & BO evaneſcat, ducenda erit recta altera AX per ipſum verticem B.

Per contrarium vero, quotieſcumque recta BZ angulum conſtituit cum BL, tunc non ſolum in B, ſed in alio quoque puncto ea ſecabit hyperbolam. Nam, ratione ejus anguli, eſt finitæ magnitudinis, tam portio AG, quam portio IQ: proindeque recta altera AX per ipſum verticem B duci non poterit.

Huic autem conſequens eſt, quod ſi in plano deſcriptæ hyperbolæ detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela diametri ordinatis, ſemper ex vertice B duci poſſit recta alia, quæ ei parallela, hyperbolam ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum conſtituat cum BL.

X. Cæterum haud quidem putandum eſt, hyperbolam in plano *per ſolas rectarum longitudines* dumtaxat *expoſita ratione* poſſe deſcribi. Vix enim ulla eſt ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam deſcribendi modus nobis non ſubnaſcitur. Quin ſæpe ex eadem proprietate poſſunt etiam *plures* derivari.

X. *Hyperbole per ſolas rectarum longitudines deſcriptio altera paulo ſpecialis.*

FIG. 19. Ita, ſi angulus BAD, quem conſtituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; ope ejuſdem illius proprietatis, quæ hyperbolæ competit relate ad diametrum, poterit etiam quæſita hyperbola deſcribi in hunc alium modum.

Secetur diameter AB ſubinde in puncto H, ut AH ſit ad BH, veluti eſt AD ad AB. Deinde, erecta ſuper BH perpendiculari HL, revolvatur, tum circa verticem A angulus rectus XAY, cum circa verticem alterum B recta BZ.

Fiat porro utriuſque revolutio ea lege, ut interſectio rectæ BZ cum latere anguli AY contingat ſemper ſuper recta HL. Et interſectio ejuſdem rectæ BZ cum latere altero AX optatam hyperbolam in plano delineabit.

XI.

Demonſtratio alterius hujus rationis, qua deſcribi poteſt hyperbola.

FIG. 19.

XI. Nec ſane difficile erit, *hujus rei veritatem oſtendere*. Ex aliquo enim interſectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum ſit ei perpendicularis, parallela erit ipſi HL: & conſequenter duo triangula BNM, BHL æquiangula erunt.

Et quoniam rectus eſt uterque angulorum BAD, XAY; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit etiam angulus BAY æqualis angulo DAX, ſive AMN: & propterea duo triangula MNA, AHL etiam æquiangula erunt.

Ulterius MN quadratum eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad NB. Sed MN eſt ad AN, ut AH ad HL; itemque MN eſt ad NB, ut HL ad BH. Quare erit MN quadratum ad rectan-

ctangulum ANB in ratione compoſita ex AH ad HL, & ex HL ad BH.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AH ad BH. Unde erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AH ad BH. Sed ex conſtructione AH eſt ad BH, ut AD ad AB. Et igitur erit rurſus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

XII. *Quod altera iſta hyperbolam deſcribendi ratio recidat in priorem paulo generaliorem.* Fig. 19.

XII. Diſſimulandum autem hoc loco non eſt, quod *alter iſte hyperbolam deſcribendi modus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus.* Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro BA parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit oſtendere, portionem DF æqualem eſſe portioni AG, quam abſcindit ex AD, producta ſi opus, recta BZ.

Quum enim rectus ſit uterque angulorum XAY, DAH; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Hinc, quum ſit BH ad HL in ratione compoſita ex BH ad AH, & ex AH ad HL; habebit quoque BH ad HL rationem compoſitam ex BH ad AH, & ex AD ad DF. Sed ex conſtructione BH eſt ad AH, ut AB ad AD. Quare erit rurſus BH ad HL in ratione compoſita ex AB ad AD, & ex AD ad DF.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AB ad DF. Unde erit ex æquali, ut BH ad HL, ita AB ad DF.

Sed BH eſt ad HL, ut AB ad AG. Itaque erit rurſus ex æquali, ut AB ad DF, ita AB ad AG: & propterea duæ portiones DF, AG æquales erunt inter ſe.

C A P. VI.

Quo pacto deſcribi poſſit parabola in plano per rectas ſolas, oſtenditur.

I. *Proponitur ratio deſcribendi parabolam in plano per rectas ſolas.*

FIG. 20.

I. ILlud reliquum jam eſt, ut *qua ratione per ſolas linearum longitudines parabola in plano deſcribi poſſit*, oſtendamus. Dentur itaque poſitione in plano aliquo rectæ duæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A; quarum prior AB ſit terminata ad punctum A, indefinita vero verſus B; altera AD ſit etiam magnitudine data. Et oporteat, in eodem plano deſcribere parabolam, cujus AB ſit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ.

Ducatur per punctum D recta DE, ipſi AB parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, GZ; quarum prior AX circa punctum A revolvatur; altera GZ moveatur ſubinde ſuper AD, ut maneat ipſi AB, vel DE jugiter parallela. Ferantur autem rectæ iſtæ ea inſuper lege, ut portio DF, abſciſſa ex DE per priorem AX, ſit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta ſi

opus

opus, abſcindit eodem tempore recta altera GZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD deſcribitur continuis interſectionibus ipſarum AX, GZ, parabolam, quam quærimus, eſſe.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ conveniat cum AB in puncto N. Jamque erit punctum M in quæſita parabola, ſi utique oſtendi poſſit, MN quadratum æquale eſſe rectangulo DAN. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum DAN in ratione compoſita ex MN ad AD, & ex MN ad AN; ſive etiam in ratione compoſita ex AG ad AD, & ex AD ad DF. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AG ad DF. Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum DAN, ita AG ad DF; & propterea, ſicuti duæ AG, DF inter ſe ſunt æquales; ita erit MN quadratum æquale rectangulo DAN.

II. Non ergo dubitari poteſt, quin mutuis interſectionibus rectarum AX, GZ deſcribatur parabola, quam quærimus. Interim, ut *deſcriptio ejus melius intelligatur*, notandum eſt primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD verſus AB; tunc recta altera GZ ferri debeat rectilineo ſuo motu ex AB verſus DE. Et quoniam motus harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per ipſas ex rectis DE, AD ſint perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod ubi recta AX pervenit ad AB, & infinitam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc

II. *Monita pro allata parabola deſcriptione melius intelligenda.*

FIG. 20.

altera GZ ab eadem AB infinite recedat, quia hac ratione ipſa quoque ex AD infinitam portionem abſcindet.

Notandum eſt etiam, quod quotieſcumque eadem AX pergit moveri circulariter ex AB verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc recta altera GZ intelligenda ſit ex infinita diſtantia, ad quam abierat, accedere rurſus ad AB per plagam oppoſitam. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege perfici debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, ex altera parte productis, maneant ſemper æquales inter ſe: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abſcindit ex DE; tunc altera GZ ſuper AB reperiatur, quia hac ratione ipſa etiam ex AD nullam portionem abſcindet.

III.
Figura parabolæ ex allata ejus deſcriptione deducitur.
FIG. 20.

III. Atque hinc luce clarius apparet, *parabolam conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis*, quæ ſimul junguntur in puncto A, vertice ejuſdem diametri. Una ſiquidem deſcribitur, quum recta AX fertur circulariter ex AD verſus AB, eaque continetur in agulo BAD. Altera deſcribitur, quum eadem AX moveri pergit ex AB verſus AH, & pars iſta continetur in angulo BAH. Nec ſane, continuando motum ejuſdem rectæ AX, uſque donec circumferentiam integram abſolvat, aliæ ei partes addi poſſunt.

Nam primo, quotieſcumque recta AX fertur ex AH verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc altera GZ proſe-

que-

quetur motum ſuum ex AB verſus DE. Quare, quum fiant earundem rectarum interſectiones in angulo BAD; deſcribetur eadem parabolæ portio, quæ in angulo illo continetur. Et ſecundo, ubi eadem recta AX fertur ex AK verſus AD; tunc altera GZ redibit ad AB per plagam oppoſitam. Unde, quum earundem rectarum interſectiones fiant in angulo BAH; deſcribetur parabolæ portio illa, quæ eo in angulo continetur.

IV. *Proprietas parabolæ, quæ ex eadem deſcriptione conſequitur, & quomodo per eam parameter definitur.* Fig. 20.

IV. Ex allata autem parabolæ deſcriptione perſpicuum eſt, *ei id quidem contingere*, ut ſi per aliquod ejus punctum M ducantur rectæ duæ AX, GZ, prior quidem pertinens ad verticem A, altera diametro AB parallela; portiones DF, AG, quas ipſæ abſcindunt ex rectis DE, AD, productis ſi opus, ſint perpetuo æquales inter ſe. Inde vero *plura poſſunt obtineri, aliquem fortaſſe uſum deinceps habitura*.

Nimirum primo *determinari poteſt longitudo parametri*, quotieſcumque una cum parabola data eſt, tam diameter AB, quam poſitio ſuarum ordinatarum.

Sit enim AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Et, ſumpto in parabola puncto quovis M, agantur per illud rectæ duæ AX, GZ, una pertinens ad verticem A, altera diametro AB parallela, quæ conveniat cum ejus parametro AD, producta ſi opus, in puncto G.

Abſcindatur deinde ex diametro AB portio AS, æqualis ipſi AG. Et, ducta per punctum S recta SF, parallela rectæ AD, quæ

oc-

occurrat in F rectæ AX ; exhibebit recta iſta SF quæſitam parametri longitudinem.

V.
Quomodo definiri poteſt punctum, in quo recta, ex vertice ducta, parabolam ſecat.
FIG. 20.

V. Secundo *definiri poteſt punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat parabolam. Nimirum, ſi ducatur recta GZ, diametro AB parallela, quæ abſcindat ex AD, producta ſi opus, portionem AG, æqualem ipſi DF. Nam interſectio rectarum AX, GZ quæſitum punctum exhibebit.

Hinc, ſiquidem recta AX cadat ſuper AD, quæ ducta eſt per verticem A diametri ordinatis æquidiſtanter; continget ea parabolam in ſolo puncto A. Nam in iſto caſu portio DF evaneſcit. Quare, ut etiam evaneſcat portio AG, ducenda erit recta altera GZ per ipſum verticem A.

Per contrarium vero, quotieſcumque recta AX angulum conſtituit cum AD, tunc non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto parabolam ſecabit. Nam, ratione ejus anguli eſt finitæ magnitudinis portio DF: proindeque recta altera GZ per ipſum verticem A tranſire non poterit.

Huic autem conſequens eſt, quod ſi in plano deſcriptæ parabolæ detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela diametri ordinatis, ſemper ex vertice A duci poſſit recta alia, quæ ei parallela parabolam ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum conſtituat cum AD.

VI.
Quomodo determinari poteſt punctum, in quo recta, dia-

VI. Denique *determinari poteſt punctum*, in quo recta GZ, ducta æquidiſtanter diametro AB, parabolam ſecat. Nimirum, ſi ex vertice A ducatur recta AX, quæ abſcindat ex DE,

DE, producta ſi opus, portionem DF, æqualem ipſi AG. Nam interſectio rectarum GZ, AX quæſitum punctum exhibebit.

metro parallela, parabolam ſecat.

FIG. 20.

Quemadmodum autem, finita exiſtente portione DF, vel AG, rectæ duæ GZ, AX ſemper ſeſe mutuo ſecant; ita omnis recta, quæ ducitur diametro AB parallela, ad finitam ab ea diſtantiam, omnino neceſſe eſt, ut parabolam ſecet. Et, ſicuti interſectio rectarum GZ, AX contingit in unico puncto; ſic eadem parallela in unico quoque puncto parabolam ſecabit.

Hinc vero conſequitur, crura duo, quæ parabolam conſtituunt, quo magis a diametri vertice recedunt, eo majorem ab ipſa diametro diſtantiam ſortiri. Unde etiam efficitur, ut parabola ſit curva, quæ expanditur in infinitum, & quæ nec ex ſe ſola, nec cum ſua diametro ſpatium comprehendit.

VII. Cæterum haud quidem putandum eſt, parabolam in plano *per ſolas rectarum longitudines* dumtaxat *expoſita ratione* poſſe deſcribi. Vix enim ulla eſt ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam deſcribendi modus nobis non ſubnaſcitur. Quin ſæpe ex eadem proprietate poſſunt etiam *plures* derivari.

VII. *Parabolæ per ſolas rectarum longitudines deſcriptio altera paulo ſpecialis.*

FIG. 21.

Ita, ſi angulus BAD, quem conſtituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; ope ejuſdem illius proprietatis, quæ parabolæ competit relate ad diametrum, poterit etiam quæſita parabola deſcribi in hunc alium modum.

Extendatur diameter BA uſque ad H, ita, ut AH ſit æqualis parametro AD. Deinde, ere-

erecta ſuper BH perpendiculari HL, revolvatur circa verticem A angulus rectus XAY: eodemque tempore feratur ſuper AD recta GZ, ipſi AB æquidiſtanter.

Fiat porro utriuſque motus ea inſuper lege, ut interſectio rectæ GZ cum latere anguli AY contingat ſemper ſuper recta HL. Et interſectio ejuſdem rectæ GZ cum latere altero AX optatam parabolam in plano delineabit.

VIII. *Demonſtratio alterius hujus rationis, qua deſcribi poteſt parabola.* FIG. 21.

VIII. Nec ſane difficile erit, *hujus rei veritatem oſtendere*. Ex aliquo enim interſectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum ſit ei perpendicularis; rectus erit angulus ANM; & conſequenter æqualis angulo AHL, qui ex conſtructione ſimiliter eſt rectus.

Et quoniam rectus eſt uterque angulorum DAH, XAY; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, ſupererit angulus HAY æqualis etiam angulo DAX: & propterea, quum angulus DAX æqualis ſit angulo AMN; erit eidem angulo AMN æqualis pariter angulus HAY.

Hinc duo triangula AHL, MNA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita MN ad AN. Sed AH eſt ad HL, ut AD ad MN; quum ſint æquales, tam duæ AH, AD, quam duæ HL, MN. Itaque erit ex æquali, ut AD ad MN, ita MN ad AN: & propterea MN quadratum rectangulo DAN æquale erit.

IX. *Quod altera*

IX. Diſſimulandum autem hoc loco non eſt, quod *alter iſte parabolam deſcribendi modus*

dus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus. Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro AB parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit oſtendere, portionem DF æqualem eſſe portioni AG, quam abſcindit ex AD, producta ſi opus, recta GZ.

iſta parabolam deſcribendi ratio recidat in priorem paullo generaliorem.

FIG. 21.

Quum enim rectus ſit uterque angulorum XAY, DAH, iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Et quoniam æquales ſunt inter ſe, tam duæ AH, AD, quam duæ HL, AG; erit quoque, ut AH ad HL, ita AD ad AG. Unde erit ex æquali, ut AD ad DF, ita AD ad AG: proindeque portiones duæ DF, AG æquales erunt inter ſe.

X.
Monita circa utramque parabolam deſcribendi rationem, & ſpeciatim quod ſecunda etiam generalis eſſe poſſit.

X. Cæterum *allatæ parabolam deſcribendi rationes ſunt illæ eædem, quibus, tum ellipſis, cum hyperbolæ deſcriptionem ſuperius obtinuimus*. Quod enim hic recta GZ rectilineo motu feratur ſuper AD; id exinde oritur, quod longitudo ipſius AB ſit infinita. Nam profecto motus circularis in rectilineum vertitur, quotieſcumque centrum ejus motus in infinitum abire ſupponitur.

FIG. 22.

Notatu autem hic dignum exiſtimo, quod altera parabolam deſcribendi ratio, non ſecus ac prima, obtineat etiam, quum angulus BAD nequaquam eſt rectus. Si enim rectam HL ſubinde inclinemus ſuper BH, ut angu-

lus

lus AHL æqualis ſit angulo DAH; ipſumque angulum XAY, qui revolvitur circa verticem A, aſſumamus æqualem pariter angulo DAH: adhuc expoſita ratione parabola deſcribetur.

Ducatur ſimiliter ex aliquo interſectionis puncto M ad diametrum AB ordinata MN. Et quoniam ordinata iſta eſt ipſi AD parallela; erit angulus MNA æqualis angulo DAH. Sed ex conſtructione angulus DAH æqualis eſt angulo AHL. Quare erit etiam angulus MNA æqualis angulo AHL.

Rurſus, quia poſiti ſunt æquales anguli XAY, DAH; dempto ex iis communi angulo DAY, ſupererit angulus DAX æqualis etiam angulo HAY. Sed, ob parallelas AD, MN, angulus DAX æqualis eſt angulo AMN. Quare eidem angulo AMN erit pariter æqualis angulus HAY.

Hinc duo triangula AHL, MNA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH, ſeu AD ad HL, ita MN ad AN. Sed, ob æquales angulos DAH, AHL, recta HL eſt æqualis ipſi AG, ſive MN. Itaque erit quoque, ut AD ad MN, ita MN ad AN: & propterea MN quadratum æquale erit rectangulo DAN.

Nec ſilentio præteribimus, quod altera iſthæc parabolam deſcribendi ratio, etiam quum ad ſuam univerſalitatem evehitur, recidat in eam, quæ primo loco allata eſt. Nam ducta per punctum D recta DE, ipſi AB parallela, cum qua latus AX conveniat in F; adhuc portio DF æqualis fiet portioni AG.

LI.

LIBER III.

De Conicarum Sectionum Diametris aliis.

Conicæ ſectiones, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortiuntur, aliis etiam infinitis ſunt præditæ, ad quas quum referuntur, iiſdem proprietatibus gaudent. De aliis hiſce diametris conicarum ſectionum agendum nobis erit hoc libro: quas tamen methodo plane nova, nec adhuc ab ullo tentata independenter a tangentibus harum curvarum definire conabimur.

CAP. I.

Ellipſis omnes aliæ diametri definiuntur.

I. Quemadmodum in circulo quælibet diameter tranſit per centrum ejus; ſic etiam in ellipſi, cujus ſpecies quædam eſt circulus, diametri omnes tranſeunt per punctum illud, quod ellipſis *centrum* appellatur. I. *Quid ſit centrum ellipſis, & cur tali nomine inſignitur.* FIG. 23.

Eſt autem hoc punctum *id, quod biſariam dividit diametrum principalem*, ſive quæ ex cono deducitur. Ut ſi AB ſit diameter, quam ellipſis AMB ſortitur in ipſo cono, eadem-

demque ſecetur bifariam in puncto C; vocabitur punctum iſtud C centrum ipſius ellipſis.

Sortitum eſt vero tale nomen iſtiuſmodi punctum; quia *omnis recta per ipſum ducta, & utrinque ad ellipſim terminata bifariam in eo dividitur*. Ducatur enim per punctum C recta quævis EF, quæ utrinque occurrat ellipſi in punctis E, & F. Dico, rectam iſtam EF ſecari bifariam in puncto C.

Demittantur namque ex punctis E, & F ordinatæ ad diametrum EG,FH. Quumque eæ inter ſe ſint parallelæ; æquiangula erunt triangula CEG, CFH; proindeque erit, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita EG quadratum ad FH quadratum. Sed, propter ellipſim, EG quadratum eſt ad FH quadratum, ut rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Quare erit ex æquali, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum AHB.

Hinc, addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; & conſequenter latera horum quadratorum CG, CH, CA, CB pariter proportionalia erunt. Sed, ob eadem triangula æquiangula CEG, CFH, CG eſt ad CH, ut CE ad CF. Itaque erit ex æquali, ut CA ad CB, ita CE ad CF: & propterea, ſicuti duæ CA, CB inter ſe ſunt æquales; ſic & duæ CE, CF ſimiliter inter ſe æquales erunt.

II. *Theorema fundamentale pro de-*

II. Ut autem pateat, quod ſit diameter ellipſis recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata; *oſtendendum eſt*

prius

prius ſequens theorema. Nimirum, quod ſi EF ſit aliqua iſtarum rectarum, eaque biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela ducatur OL; ſit ſemper, ut CL ad CG, ita CG ad CA. *terminandis ellipſeos diametris aliis* FIG. 23.

Nec ſane difficile erit theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, ducta ad diametrum AB ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipſius AL. Unde, quum ſit etiam diameter AB dupla ipſius AC; erit reliqua NB dupla pariter reliquæ LC: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

Et quoniam MN dupla eſt etiam ipſius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex OL. Quare erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita OL quadratum ad rectangulum ALC. Sed, propter ellipſim, MN quadratum eſt ad rectangulum ANB, ut EG quadratum ad rectangulum AGB. Itaque erit ex æquali, ut OL quadratum ad rectangulum ALC, ita EG quadratum ad rectangulum AGB; & conſequenter permutando erit quoque, ut OL quadratum ad EG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB.

Hinc, quum, ob triangula æquiangula COL, CEG, OL quadratum ſit ad EG quadratum, ut CL quadratum ad CG quadratum; erit rurſus ex æquali, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB: & propterea, addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut CL

CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ACL ad AC quadratum, hoc eſt, ita CL ad AC: proindeque tres rectæ CL, CG, CA continue proportionales erunt.

III. *Præcedentis theorematis conſectarium primum.* Fig. 23.

III. Inde vero *ſequitur primo*, quod ſi ex punctis A, & E ducantur rectæ AK, EI, ipſis EG, AM parallelæ, quarum prior AK conveniat cum EF in puncto K, & altera EI cum AB in puncto I; triangulum EGI ſit æquale trapetio AGEK.

Eſt enim ex oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; ſive etiam, ut CA ad CI. Quare erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI: &, propterea, quum tres rectæ CG, CA, CI ſint continue proportionales; erit quoque, ut CG ad CI, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CEG, CEI, CG eſt ad CI, ut eſt triangulum CEG ad triangulum CEI; itemque, ob ſimilia triangula CEG, CKA, CG quadratum eſt ad CA quadratum, ut triangulum CEG ad triangulum CKA. Quare erit rurſus ex æquali, ut triangulum CEG ad triangulum CEI, ita idem triangulum CEG ad triangulum CKA.

Hinc triangula duo CEI, CKA æqualia erunt inter ſe: & propterea, dempto ex iis communi triangulo CEG, ſupererit triangulum EGI æquale trapetio AGEK. Et ſi auferatur adhuc commune trapetium AGEX; remanebit quoque triangulum XAI æquale triangulo XEK.

IV. Iiſdem poſitis, *ſequitur ſecundo*, quod trian-

triangulum AOK ſit æquale trapetio EOAI. IV. *Conſectarium ſecundum.*

Eſt enim ex oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque CG eſt ad CA, ut CE ad CK. Quare erit ex æquali, ut CO ad CE, ita CE ad CK: & propterea, quum tres rectæ CO, CE, CK ſint continue proportionales; erit quoque, ut CO ad CK, ita CO quadratum ad CE quadratum. Fig. 23.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CAO, CAK, CO eſt ad CK, ut eſt triangulum CAO ad triangulum CAK; itemque, ob ſimilia triangula CAO, CIE, CO quadratum eſt ad CE quadratum, ut triangulum CAO ad triangulum CIE. Quare erit rurſus ex æquali, ut trianguium CAO ad triangulum CAK, ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE.

Hinc triangula duo CAK, CIE æqualia erunt inter ſe: proindeque, dempto ex iis communi triangulo CAO, ſupererit triangulum AOK æquale trapetio EOAI. Id vero erui quoque poteſt ex æqualitate triangulorum XAI, XEK ſuperius oſtenſa. Nam, addito iis communi trapetio AOEX, fiet trapetium EOAI æquale triangulo AOK.

V. Capiatur porro in ellipſi punctum quodvis aliud P, ex quo ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, EG parallelæ. Et *facile erit oſtendere*, quod triangulum PQS ſit etiam æquale correſpondenti trapetio AQRK. V. *Conſectarium tertium.* Fig. 23. 24.

Quum enim ſimilia ſint triangula CAK, CGE; erit, ut CA quadratum ad CG quadra-

 tum,

tum, ita triangulum CAK ad triangulum CGE. Quare convertendo erit etiam, ut CA quadratum ad rectangulum AGB, ita triangulum CAK ad trapetium AGEK.

Eadem ratione, quum ſimilia ſint triangula CAK, CQR; erit, ut CA quadratum ad CQ quadratum, ita triangulum CAK ad triangulum CQR. Unde convertendo erit quoque, ut CA quadratum ad rectangulum AQB, ita triangulum CAK ad trapetium AQRK.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut rectangulum AGB ad rectangulum AQB, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: adeoque, quia, propter ellipſim, rectangulum AGB eſt ad rectangulum AQB, ut EG quadratum ad PQ quadratum; erit ex æquali, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK.

Et quoniam ex conſtructione parallelæ ſunt inter ſe, tam duæ EG, PQ, quam duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS ſimilia erunt. Unde, quum ſit, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita triangulum EGI ad triangulum PQS; erit rurſus ex æquali, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: & propterea, quemadmodum triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale trapetio AQRK.

VI. *Conſectarium quartum.*

VI. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum recta EF in puncto V, *nullo negotio oſtendemus quoque*, quod triangu-

gulum PVR ſit æquale correſpondenti trapetio EVSI.

Ponamus etenim primo, quod punctum S ſit ſupra verticem A, & quod punctum P exiſtat inter A, & E. Quia igitur triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK, & triangulum PQS æquale trapetio AQRK: ſi ex triangulo auferatur triangulum, ex trapetio trapetium, ex utroque autem commune trapetium PQGZ; ſupererit trapetium EZSI æquale trapetio PZER; proindeque, addito communi triangulo EZV, fiet trapetio EVSI æquale triangulum PVR. Fig. 23.

Ponamus ſecundo, quod punctum S ſit quidem ſupra verticem A, ſed quod punctum P ſit ad alteram partem puncti E relate ad eundem verticem A. Et rurſus, quia triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK: addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale trapetio AQRK, ſive etiam triangulo PQS: & proinde, dempto communi trapetio VSQR, fiet trapetio EVSI rurſus æquale triangulum PVR.

Ponamus denique, quod punctum S ſit infra verticem A. Et quoniam triangulum PQS oſtenſum eſt æquale trapetio AQRK: addito, vel dempto communi trapetio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapetio ASVK: Sed, propter æqualitatem triangulorum XEK, XAI, ſuperius oſtenſam, trapetium ASVK eſt æquale trapetio EVSI. Quare etiam triangulum PVR æquale erit trapetio EVSI. Fig. 24.

VII. Priuſquam ulterius progrediamur, *notatu hic dignum exiſtimo*, quod punctum P VII. *Monitum*

circa poſtrema duo conſectaria. ita quidem a nobis ſumptum eſt in ellipſi, ut ordinata PQ, exinde ducta ad diametrum FIG. 23. 24. AB, cadat ſupra centrum ellipſis. Sed fieri quoque poteſt, ut eadem illa ordinata, vel ad centrum dirigatur, vel etiam cadat infra centrum.

Quotieſcumque ordinata PQ dirigitur ad centrum; liquido patet, trapetium AQRK non differre a triangulo CAK. Sed, ubi eadem ordinata cadit infra centrum; tunc loco trapetii AQRK ſumenda eſt differentia triangulorum CAK, CQR, quam in omni caſu trapetium illud adæquat.

Similiter idem punctum P ſubinde quidem a nobis ſumptum eſt in ellipſi, ut recta PS, exinde ducta æquidiſtanter ipſi EI, conveniat cum EF ſupra centrum ellipſis. Sed fieri quoque poteſt, ut eadem recta PS conveniat cum EF, vel in ipſo centro, vel etiam infra centrum.

Quotieſcumque recta PS occurrit alteri EF in ipſo centro; manifeſtum eſt, trapetium EVSI non differre a triangulo CEI. Sed, ubi occurſus fit infra centrum; tunc loco trapetii EVSI ſumenda eſt differentia triangulorum CEI, CVS, quam in omni caſu trapetium illud adæquat.

VIII. *Oſtenditur, quod omnis recta, ducta per centrum, ſit diameter ellipſis.* FIG. 23. 24.

VIII. His præmiſſis, facile modo erit oſtendere, quod *ſit diameter ellipſis recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata*. Ut enim talis eſſe poſſit, duo quidem requiruntur. Primum, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque terminatas ad ellipſim. Deinde, ut quadrata

ex

ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſint, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus ipſius portionibus continentur.

Jam horum utrumque facili negotio demonſtrabitur. Quantum enim ad primum, ſit EF recta quævis ducta per centrum C, eaque biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A diametri principalis. Dico, eandem EF ſecare quoque bifariam in V, quamvis aliam rectam PP, quæ ipſi AM parallela, utrinque ad ellipſim terminatur.

Poſitis enim omnibus, ut ſupra; erit utrumque triangulorum PVR, PVR æquale trapetio EVSI. Quare æqualia erunt inter ſe ipſa duo triangula PVR, PVR. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt ut quadrata laterum homologorum PV, PV. Itaque latera iſthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & conſequenter tota PP bifariam ſecta erit in V.

IX. Pars altera demonſtrationis, qua præcedens veritas evincitur.

IX. Quantum vero ad ſecundum, *nec etiam magno mentis acumine opus eſt, ad illud oſtendendum*. Maneant enim omnia, adhuc ut ſupra. Et dico inſuper, quadrata ipſarum AO, PV eſſe inter ſe, ut rectangula correſpondentia EOF, EVF. FIG. 23. 24.

Quum enim ſimilia ſint triangula CEI, COA; erit, ut CE quadratum ad CO quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum COA. Quare convertendo erit etiam, ut CE quadratum ad rectangulum EOF, ita triangulum CEI ad trapetium EOAI.

Eadem ratione, quum ſimilia ſint triangula CEI, CVS; erit, ut CE quadratum ad

CV quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum CVS. Unde convertendo erit quoque, ut CE quadratum ad rectangulum EVF, ita triangulum CEI ad trapetium EVSI.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF, ita trapetium EOAI ad trapetium EVSI: adeoque, quia trapetia iſta oſtenſa ſunt æqualia triangulis AOK, PVR; erit ex æquali, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

Quoniam vero ex conſtructione parallelæ ſunt inter ſe, tam duæ AK, PR, quam duæ AO, PV; triangula duo AOK, PVR ſimilia erunt. Quare, quum ſit, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita triangulum AOK ad triangulum PVR; erit rurſus ex æquali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

X. Quod tantum rectæ ſint ellipſis diametri, quæ tranſeunt per centrum. Fig. 23. 24.

X. Non ergo dubitari poteſt, quin recta EF, ducta per centrum C, & utrinque ad ellipſim terminata, ſit ejus diameter. Nam & bifariam dividit rectas omnes, quæ ſubtenſæ AM æquidiſtantes, utrinque ad curvam terminantur. Et quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſervant inter ſe eandem rationem, quam habent rectangula, ſub correſpondentibus ipſius EF portionibus contenta.

Sed facile erit etiam oſtendere, quod *præter eas, quæ tranſeunt per centrum ellipſis, nulla alia recta linea poſſit eſse diameter ejus.* Ut enim recta aliqua eſſe queat diameter ellipſis, illud primo requiritur, ut bifariam ſe-

cet

cet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad ellipſim terminatas. Unde, ſi oſtendi poſſit, accidens iſtud iis tantummodo rectis competere, quæ tranſeunt per centrum ellipſis; jam veritas ejus, de quo agitur, liquido conſtabit.

Id vero oſtendetur in hunc modum. Sit TY recta poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela eſt ordinatis diametri principalis AB; ſecabit diameter iſta AB bifariam rectas omnes, quæ ipſi TY æquidiſtantes, utrinque ad ellipſim terminantur.

Quod ſi autem recta TY non ſit parallela ordinatis diametri principalis AB; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſemper ex vertice hujus A duci poterit recta alia AM, quæ illi parallela, ellipſim ſecet in alio puncto. At rectas omnes ipſi AM æquidiſtanter ductas, & utrinque ad ellipſim terminatas, ut modo vidimus, non alia biſecat recta, quam quæ tranſit per centrum C, & bifariam dividit ſubtenſam ipſam AM.

XI. *Quod nequeat una diameter parallela eſſe ordinatis alterius, niſi & iſta æquidiſtans ſit ordinatis illius.* Fig. 25.

XI. Cæterum circa diametros ellipſis illud notare ſedulo oportet, quod *ſi aliqua extiterit diameter, ordinatis alterius parallela, iſta viciſſim illius ordinatis æquidiſtans eſſe debeat*. Sit enim AB ellipſis diameter aliqua, ejuſque ordinatis parallela ſit diameter alia EF. Dico, viciſſim diametrum AB parallelam eſſe ordinatis ipſius EF.

Ducatur ſiquidem recta MP, ipſi AB parallela, quæ utrinque ad ellipſim terminata con-

conveniat cum EF in V. Jamque, actis ad eandem AB ordinatis MN, PQ, erunt iſtæ æquales inter ſe, velut parallelogrammi MQ latera oppoſita; & conſequenter erunt etiam æqualia rectangula ANB, AQB, quæ illarum quadratis proportione correſpondent.

Hinc, detractis rectangulis iſtis ex æqualibus quadratis CA, CB; æqualia erunt pariter reliqua quadrata CN, CQ; atque adeo æqualia quoque ipſa horum quadratorum latera CN, CQ. Sed, propter parallelogramma CM, CP, duæ CN, CQ ſunt æquales duabus MV, PV. Itaque MV, PV etiam inter ſe æquales erunt: & proptera tota PM biſecta erit in V.

XII. *Demonſtrationis pars altera, & quod bina illa diametri vocentur conjugatæ.*

XI. Secat igitur EF bifariam rectas omnes, quæ ipſi AB æquidiſtantes, utrinque ad ellipſim terminantur. Unde, *ut veritas ejus, de quo agitur, omnimode conſtet*, oſtendendum eſt quoque, quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum eſſe, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius EF continentur; hoc eſt, AC quadratum eſſe ad MV quadratum, ut eſt rectangulum ECF ad rectangulum EVF. (FIG. 25.)

Id autem oſtendetur hac ratione. Quoniam EC, MN ſunt ordinatæ diametri AB; erit EC quadratum ad MN, ſeu CV quadratum, ut eſt rectangulum ACB, ſeu AC quadratum ad rectangulum ANB. Itaque convertendo erit etiam, ut EC quadratum, ſeu rectangulum ECF ad rectangulum EVF, ita AC quadratum ad CN, ſeu MV quadratum.

Nulli ergo dubium eſſe poteſt, quod ſi

ali-

aliqua ellipſis diameter parallela ſit ordinatis alterius diametri, iſta per contrarium æquidiſtans eſſe debeat ordinatis illius. Binæ autem iſtæ diametri, quarum altera alterius ordinatis æquidiſtat, ſæpius deinceps ſub contemplationem venient. Et, ut commodius diſtingui poſſint, vel ambas ſimul *conjugatas*, vel alteram alterius *conjugatam* appellabimus.

CAP. II.

Diametrorum ellipſis communia quædam oſtenduntur.

I. Vidimus præcedenti capite, ellipſim, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortitur, alias etiam innumeras habere, quarum quælibet tranſit per centrum ipſius ellipſis. Sed *communia harum diametrorum*, operæ pretium eſt, ut paulo diſtinctius proſequamur. Quem in finem ellipſis AMB ſit AB diameter principalis, centrum punctum D, & EF alia quævis diameter.

I. Proprietates diametri principalis ad omnes alias diametros ellipſis traducuntur.

FIG. 26.

Primo igitur, quemadmodum diameter principalis AB ſuas habet ordinatas; ita ſuis quoque refertur ordinatis diameter alia EF. Sunt autem ex oſtenſis ordinatæ iſtæ rectæ illæ omnes, quæ ducuntur æquidiſtanter ſubtenſæ AM, quam ab ipſa EF ſuppono biſectam in puncto O.

Deinde, quemadmodum quadrata ordinatarum diametri principalis AB ſunt inter ſe,

ſe, ut rectangula, ſub correſpondentibus ejus portionibus contenta; ita & quadrata ordinatarum alterius diametri EF ſunt proportionalia rectangulis, quæ continentur ſub portionibus correſpondentibus ipſius EF.

Unde porro, ſi per verticem E ducatur recta EH ordinatis æquidiſtanter, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit ad rectangulum EOF, veluti eſt EH ad EF; erit in hac eadem pariter ratione quadratum cujuslibet alterius ordinatæ PV ad rectangulum EVF.

Et quemadmodum rectam iſtam EH appellare licebit *parametrum* diametri EF; ita ſi jungatur FH, cum qua conveniat in X ordinata quævis PV; erit PV quadratum æquale rectangulo EVX, & conſequenter minus rectangulo, quod ſit ex parametro EH in abſciſſam correſpondentem EV.

Quin & defectus ipſius PV quadrati a rectangulo HEV erit ſimiliter rectangulum aliud, quod habens pro ſua latitudine eandem abſciſſam EV, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod ſit ex parametro EH in ipſam diametrum EF.

II. *Communes quoque ſunt proprietates, quas ex ellipſis deſcriptione deduximus.*

II. Hæc quum ita ſint, perſpicuum eſt, *omnes illas proprietates, quæ ellipſi competunt relate ad diametrum principalem, obtinere etiam, quum ad aliam quamvis diametrum ellipſis ipſa refertur.*

Fig. 26. Hinc ulterius, ſicuti deſcribitur ellipſis in plano, per ſolas rectarum longitudines, data magnitudine, & poſitione, tam diametro principali AB, quam parametro ejus AD; ſic

etiam

etiam deſcribi poterit eadem ellipſis, ubi magnitudine, & poſitione datur, tum alia quævis diameter EF, cum illius parameter EH.

Et ſicuti recta AD, ducta per verticem A ipſius diametri principalis AB, æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingit ellipſim in ſolo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, ſimiliter ordinatis ſuis æquidiſtanter, dumtaxat in puncto E tanget ellipſim.

Quin imo, ſicuti omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice A, angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecat ellipſim; ſic pariter quælibet alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in puncto alio occurret eidem ellipſi.

Unde etiam, ſi in plano ipſius ellipſis detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela ordinatis cujuslibet alterius diametri EF, ſemper ex vertice E duci poterit recta alia, quæ ei parallela, ellipſim ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum contineat cum EH.

III. *Quod ex qualibet ellipſis diametro tranſiri poſſit in omnes alias.* FIG. 26.

III. Sed, his ita ſe habentibus, liquet quoque, quod *ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic viciſſim ex qualibet alia diametro, tum ad ipſam principalem, tum ad alias omnes progredi licebit.*

Nam ſemper ac eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod præcedenti capite oſtenſum eſt relate ad diametrum principalem, poterit

terit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alio diametro EF.

Itaque, ſi per centrum ellipſis C ducatur recta aliqua AB, quæ biſecet in G ſubtenſam PE, pertinentem ad verticem E; & demiſſa ad diametrum EF ordinata PV, huic per punctum G parallela agatur GR, erit, ut CV ad CR, ita CR ad CE.

Unde, quum omnes illæ æqualitates triangulorum, trapeziorumque, quas ſuperiori capite proſecuti ſumus relate ad diametrum principalem, obtineant quoque reſpectu ipſius diametri EF; facile erit oſtendere, rectam illam AB eſſe diametrum quoque ipſius ellipſis.

Inde enim conficitur, ipſam AB ſecare bifariam rectas omnes, æquidiſtanter ductas ſubtenſæ PE, & utrinque terminatas ad ellipſim; itemque quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum proportionalia eſſe rectangulis, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius AB continentur.

IV.

Alia diametrorum ellipſis proprietas communis, reſpiciens rectas, quas biſecat.

IV. Habent igitur omnes aliæ ellipſis diametri eaſdem omnino proprietates cum diametro principali; & ex qualibet earum, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes progredi licet. Sed ellipſeos diametri, *præter hactenus recenſitas proprietates, plures alias communes habent*, quas non abs re erit hic breviter oſtenſas exhibere.

Ac principio quidem illud nobis eſt oſtendendum, quod *qualibet diameter ellipſis non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividat bifariam, quam quæ, vel tranſeunt*

ſeunt per centrum, vel ordinatim ad ipſam diametrum applicantur.

Sit enim AB ellipſis AMB diameter quævis, ſitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Ducatur in ellipſi recta PP, quæ utrinque ad curvam terminata, nec tranſeat per centrum C, nec ſit ordinatim applicata diametro AB. Dico, eam ab ipſa diametro AB non poſſe ſecari bifariam. FIG. 24.

Si enim fieri poteſt, ſecetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam ea non eſt parallela ordinatis ipſius AB; ex ſuperius oſtenſis duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipſi PP parallela ellipſim ſecet in alio puncto. Ducatur itaque recta iſta, & ſit AM. Tum, biſecta ea in puncto O, jungatur CO, quæ extendatur uſque donec occurrat ellipſi in punctis E, & F.

Quia igitur recta EF tranſit per centrum C, & biſecat in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A; per ſuperius oſtenſa ſecabit quoque bifariam in V rectam PP, ipſi AM parallelam. Sed ex hypotheſi recta PP ſecatur bifariam in S. Quare eadem PP biſecta erit, tam in puncto S, quam in puncto V. Quod fieri non poteſt.

V. *Quomodo data ellipſis, ſive centrum, ſive diameter aliqua poteſt reperiri.*

V. Ex eo autem, quod quælibet diameter ellipſis eas tantum rectas, utrinque ad curvam terminatas, bifariam dividat, quæ vel tranſeunt per centrum, vel ordinatim ad ipſam applicantur: ſequitur per contrarium, ut *ſi aliqua ellipſis diameter biſecet rectam aliquam, non tranſeuntem per centrum, & utrinque*

ter-

terminatam ad ellipſim, hæc eſſe debeat diametri illius ordinata.

Unde ulterius conſequitur, ut *ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, & utrinque ad ellipſim terminatas, ea eſſe debeat diameter ipſius ellipſis, atque adeo tranſire per centrum*. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus, & centrum recta alia, hæc velut diameter biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem. Quod fieri non poteſt.

Id vero quum ita ſit, facile erit, *cujuſlibet datæ ellipſis, ſive centrum, ſive diametrum aliquam reperire*. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam ellipſim rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit ellipſis; ſic & punctum, quod biſecat diametrum iſtam, ejuſdem centrum exhibebit.

VI. *Quod in omni ellipſi reperire liceat diametrum, quæ rectos angulos conſtituat cum ſuis ordinatis.*

Fig. 27.

VI. Speciatim in omni ellipſi reperire licet *diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat*. Inveniatur ſiquidem ipſius datæ ellipſis diameter quævis EF, ſitque EH recta illa, cui omnes iſtius diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ. Jamque, ſi angulus FEH fuerit rectus, erit ipſa EF diameter optata. Quod ſi ſecus contigerit, inveniemus diametrum, quam quærimus, ſequenti ratione.

Super diametro EF deſcribatur ſemicirculus EPF, qui neceſſario ſecabit ellipſim in puncto aliquo P. Jungantur deinde rectæ PE, PF, quæ ſecentur bifariam in punctis G, & I. Agantur porro per puncta iſta dia-

diametri KL, AB. Et utraque harum diametrorum eam, quam quærimus, exhibebit.

Ob rectas enim PE, EF biſectas in punctis G,& C, GE eſt ad GP, ut CE ad CF. Quare diameter KL ipſi PF parallela erit; adeoque angulus CGE æqualis erit angulo FPE. Sed, propter ſemicirculum, angulus FPE eſt rectus. Itaque etiam angulus CGE rectus erit; & conſequenter diameter KL cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituet.

Eadem ratione, ob rectas EF, PF biſectas in punctis C, & I, CE eſt ad CF, ut PI ad IF. Itaque diameter AB ipſi PE parallela erit; atque adeo angulus CIF æqualis erit angulo EPF. Sed, propter circulum, angulus EPF eſt rectus. Quare rectus erit quoque angulus CIF: & propterea diameter AB cum ordinatis ſuis rectos angulos continebit.

VII. Neque vero difficile erit oſtendere *id, quod in conſtructione aſſumptum eſt*, nimirum, quod ſemicirculus, deſcriptus ſuper diametro EF, occurrere debeat ellipſi in puncto aliquo P. Quum enim recta EH non ſit perpendicularis ipſi EF, utique ſemicirculus ille, neceſſe eſt, ut ſecet, vel ipſam EH, vel eam, quæ ducitur per punctum F eidem EH æquidiſtanter.

VII. *Demonſtratio ejus, quod aſſumptum eſt in præcedenti conſtructione.* FIG. 27.

Ponamus, ſemicirculum illum ſecare rectam EH. Id itaque fiet, quia recta EH conſtituet cum diametro EF angulum acutum verſus eam partem, in qua ſemicirculus deſcribitur. Quare recta, quæ ducitur per punctum F, ipſi EH parallela, efficiet cum eadem EF angulum obtuſum: & propterea

perpendicularis, quæ ex eodem puncto F erigitur ſuper EF, ſecabit ellipſim verſus eam partem, in qua ſemicirculus reperitur.

Jam ſemicirculus, deſcriptus ſuper diametro EF, ut ellipſim ſecare nequeat, neceſſe plane eſt, ut cadat totus, vel intra, vel extra eam. Sed horum utrumque fieri nequit. Non enim primum; quia ſic minime conveniret cum recta EH, quam tamen neceſſario ſecare debet. Nec item ſecundum; quia eo pacto occurreret perpendiculari, ex puncto F erectæ ſuper EF, quæ tamen tota extra eum cadat oportet.

VIII. *De duabus axibus ellipſis, & quod ipſa abeat in circulum, quum iin ſunt æquales.*

VIII. In qualibet igitur ellipſi exiſtunt binæ diametri, quæ rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituunt. Hujuſcemodi diametros, quas liquet eſſe conjugatas, vocabimus in poſterum *axes* ipſius ellipſis; *eoſque non aliter inter ſe mutuo æquales eſſe poſſe, quam ubi ellipſis ipſa abit in circulum*, facile erit oſtendere.

FIG. 27. Sint enim AB, KL axes ellipſis AMB: Dico, ellipſim ipſam circulum fieri, ubi æquales ſunt inter ſe duo illi axes AB, KL.

Ducatur ad axem unum AB ordinata quævis MN. Et quoniam KC, MN ſunt ordinatæ binæ ipſius AB; erit, ut KC quadratum ad MN quadratum, ita rectangulum ACB, ſive AC quadratum ad rectangulum ANB. Sed, ob axium æqualitatem, KC quadratum eſt æquale AC quadrato. Quare etiam MN quadratum erit æquale rectangulo ANB.

Eſt igitur curva AMB talis naturæ, ut demiſſa ex aliquo ejus puncto M perpendicu-

lari

lari MN ſuper AB, ſit ſemper MN quadratum æquale rectangulo ANB, contento ſub correſpondentibus portionibus ipſius AB. Unde, quum hæc ſit circuli proprietas eſſentialis, ipſa curva AMB circulus erit.

IX. Quemadmodum axes ellipſis æquales

IX. *Quomodo circuli, ſuper axibus deſcripti, ſe habent relate ad ellipſim.*

inter ſe mutuo eſſe non poſſunt, niſi, quum ellipſis ipſa abit in circulum; ita, *deſcriptis ſuper iis, velut diametris, circulis duobus, cadet totus intra ellipſim, qui deſcribitur ſuper axe minore; & viciſſim totus extra eam, qui deſcribitur ſuper axe majore.*

Sint enim AB, KL axes ellipſis AMB; Fig. 28.
ſitque etiam AB axis major, & KL axis minor. Deſcribantur ſuper iis, velut diametris, circuli duo. Dico, eum, qui deſcribitur ſuper AB, cadere totum extra ellipſim; per contrarium vero illum, qui deſcribitur ſuper KL, cadere totum extra eam.

Sumatur in ellipſi punctum quodvis M, ex quo ducantur ad axes ordinatæ MN, MO, quæ conveniant cum circulis, deſcriptis ſuper iis, in punctis P, & Q. Oſtendendum eſt igitur, PN quidem majorem eſſe, quam MN; QO vero minorem, quam MO. Id autem oſtendemus in hunc modum.

Quoniam KL minor eſt, quam AB; erit quoque KC quadratum minus rectangulo ACB. Sed, ob ellipſim, KC quadratum eſt ad MN quadratum, ut rectangulum ACB ad rectangulum ANB. Quare etiam MN quadratum minus erit rectangulo ANB: & propterea, quum, propter circulum, PN quadratum ſit æquale rectangulo ANB; erit PN major, quam MN.

 Ea-

Eadem ratione, quoniam AB major eſt, quam KL; erit quoque AC quadratum majus rectangulo KCL. Sed, ob ellipſim, AC quadratum eſt ad MO quadratum, ut rectangulum KCL ad rectangulum KOL. Quare etiam MO quadratum majus erit rectangulo KOL: & propterea, quia, propter circulum, QO quadratum eſt æquale rectangulo KOL; erit QO minor, quam MO.

X. *De angulis, quos aliæ ellipſis diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt.* FIG. 29.

X. Jam, *ut aliqua dicamus de angulis, quos aliæ ellipſis diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt*, ſit AB axis major ellipſis; & ducta ex vertice ejus A ſubtenſa quavis AM, ſit EF diameter, quæ biſecat in O iſtam ſubtenſam, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit; jungaturque BM.

Quia igitur AC eſt ad CB, ut AO ad OM; erit BM ipſi EF parallela: proindeque angulus AMB erit æqualis angulo AOC, quem diameter cum ordinata ad plagam unam conſtituit. Unde aliæ ellipſis diametri cum ordinatis ſuis ſaltem ad partem unam non alios angulos continebunt, quam quos ſuſcipere poſſunt portiones, in quas dividitur ellipſis ab axe majore.

Nullum vero horum angulorum rectum eſſe poſſe, ſed quemlibet obtuſum exiſtere; jam exinde conſequitur, quod circulus, qui deſcribitur ſuper AB, velut diametro, totus cadat extra ellipſim. Eoſdem autem majores ſemper, atque majores fieri, prout ipſorum vertices magis, atque magis ad axem minorem accedunt, tandemque maximos evadere

in

in punctis K, & L; haud difficile erit oſtendere.

Si enim, demiſſa ad axem majorem AB ordinata MN, capiatur CQ æqualis CN, & ad punctum Q ducatur ordinata alia PQ; ob æqualia rectangula ANB, AQB, erunt etiam æqualia quadrata ordinatarum MN, PQ: proindeque ſegmentum circuli, tranſiens per tria puncta A, M, B, tranſibit quoque per punctum P. Unde, ſicuti ſegmentum iſtud eo minoris ſit latitudinis, quo puncta M, & P ad axem minorem magis accedunt; ſic & ipſi anguli AMB, APB eo majores evadunt, quo minor eſt ſuorum verticum ab axe minore diſtantia.

XI. *Diametri ab ordinatis, ſuper iis ductis ab alternis earum verticibus, dividuntur in eadem ratione.*

XI. Sed, ut ad communes diametrorum proprietates rurſus revertamur, illud etiam omnibus accidit, ut *ordinatæ, quæ ad duas quaſcumque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividant ipſas diametros in eadem ratione.*

Sint enim AB, EF duæ quævis diametri ellipſis AMB. Et ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF. Dico, fore, ut BG ad AG, ita FO ad EO. FIG. 29.

Extendatur ordinata una AO uſque donec occurrat ellipſi ad partem alteram in M; tumque agatur per punctum O recta OL, ipſi EG parallela, quæ conveniat cum diametro AB in puncto L.

Et quoniam ſubtenſa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, tranſeuntem per centrum C; erit ex

ſuperius oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Unde, quum CL ſit ad CG, ut eſt CO ad CE; erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CO ad CE.

Quoniam vero invertendo CA eſt ad CG, ut CE ad CO; erit, per converſionem rationis, ut CA ad AG, ita CE ad EO; & ſumendo antecedentium dupla, erit etiam, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Unde demum dividendo erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO.

XII. *Quomodo definiri poteſt poſitio ordinatarum cujuſque diametri.*

XII. Hujus autem proprietatis ope, facile erit, *cujuſcumque ellipſeos diametri poſitionem ſuarum ordinatarum definire.*

FIG. 29. Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra ellipſim recta quævis PP, quæ non tranſeat per centrum. Tum, ſecta ea bifariam in V, jungatur CV, quæ extendatur in E, & F.

Agatur porro ex vertice A recta AM, ipſi PP parallela, quæ diametro EF occurrat in O. Et ſiquidem AB ſubinde ſecetur in G, ut BG ſit ad AG, veluti eſt FO ad EO; erit EG ordinata una ipſius AB.

Si enim EG non ſit ordinata ipſius AB, ſit ejus ordinata recta EH. Et quoniam ad diametros AB, EF ex alternis earum verticibus ductæ ſunt ordinatæ EH, AO; per proprietatem jam oſtenſam, erit, ut BH ad AH, ita FO ad EO.

Hinc, quum ex conſtructione FO ſit ad EO, ut eſt BG ad AG; erit ex æquali, ut BG ad AG, ita BH ad AH: & propterea, quum componendo ſit, ut AB ad AG, ita AB ad AH; erunt duæ AG, AH æquales inter ſe.

Quod

Quod fieri non poteſt.

XIII. Omnium quoque diametrorum ellipſis commune eſt, ut *cujuſque conjugata diameter ſit media proportionalis inter ipſam, & parametrum ejus.*

XIII. *Quod inter diametrum, & parametrum ſit media proportionalis diameter conjugata.*

Ellipſis enim AMB ſit AB diameter aliqua; ſitque etiam AD ejus parameter, & KL ejuſdem diameter conjugata. Dico, fore, ut AD ad KL, ita KL ad AB.

FIG. 27.

Quoniam enim KC eſt ordinata una ipſius AB; erit, ut AD ad AB, ita KC quadratum ad rectangulum ACB, ſive AC quadratum. Sed, ob rectas AB, KL, biſectas in centro C, KC quadratum eſt ad AC quadratum, ut KL quadratum ad AB quadratum. Quare erit ex æquali, ut AD ad AB, ita KL quadratum ad AB quadratum: & propterea tres rectæ AD, KL, AB continue proportionales erunt.

Hinc, ſiquidem KR ſit parameter diametri KL, cum iiſdem AD, KL, AB erit etiam continue proportionalis KR. Nam, ſicuti KL eſt conjugata ipſius AB, ita AB conjugata eſt ipſius KL. Unde, quemadmodum KL media eſt proportionalis inter AD, & AB; ita erit AB media proportionalis inter KL, & KR: proindeque quatuor AD, KL, AB, KR continue proportionales erunt.

XIV. Commune itidem eſt accidens diametrorum omnium, ut *rectæ, ex cujuſque verticibus per punctum aliquod ellipſis ductæ, abſcindant ex qualibet ejus ordinata portiones duas, quæ rectangulum continent, æquale quadrato ipſius ordinatæ.*

XIV. *Diametrorum omnium ellipſis alia proprietas communis.*

 Sit

FIG. 30. Sit enim AB diameter aliqua ellipſis AMB. Et, ductis per punctum quodvis E ipſius ellipſis rectis AX, BZ, conveniant eæ cum aliqua ejus diametri ordinata MN in punctis P, & Q. Dico, rectangulum PNQ æquale eſſe quadrato ipſius MN.

Ducatur ſiquidem ex puncto E ad eandem diametrum AB ordinata alia EG; eritque EG quadratum ad rectangulum AGB in ratione compoſita ex EG ad AG, & ex EG ad BG; ſive etiam in ratione compoſita ex PN ad AN, & ex QN ad BN.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PNQ ad rectangulum ANB. Quare erit ex æquali, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, ita rectangulum PNQ ad rectangulum ANB.

Ob ellipſim autem, EG quadratum eſt ad rectangulum AGB, ut MN quadratum ad rectangulum ANB. Itaque erit rurſus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita rectangulum PNQ ad idem rectangulum ANB: & propterea MN quadratum æquale erit rectangulo PNQ.

C A P. III.

Hyperbolæ omnes aliæ diametri determinantur.

I. *Quid ſit*

I. QUemadmodum in ellipſi, ita etiam in hyperbola omnes aliæ diametri

tri tranſeunt per punctum illud, quod hyperbolæ *centrum* appellatur.

Centrum hyperbolæ, & cur tali nomine vocetur.

Eſt autem hoc punctum *id, quod bifariam dividit diametrum principalem*, ſive quæ ex cono deducitur. Ut, ſi AB ſit diameter, quam hyperbola ſortitur in ipſo cono, eademque ſecetur bifariam in puncto C; vocabitur punctum iſtud C centrum ipſius hyperbolæ. FIG. 31.

Sortitum eſt vero tale nomen iſtiuſmodi punctum, quia *omnis recta per ipſum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminata, bifariam in eo dividitur*. Ducatur enim per punctum C recta quævis EF, quæ hyperbolis oppoſitis occurrat in punctis E,& F. Dico, rectam iſtam EF ſecari bifariam in puncto C.

Demittantur namque ex punctis E, & F ordinatæ ad diametrum EG,FH. Quumque eæ inter ſe ſint parallelæ; æquiangula erunt triangula CEG, CFH: proindeque erit, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita EG quadratum ad FH quadratum. Sed, propter hyperbolam, EG quadratum eſt ad FH quadratum, ut rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Quare erit ex æquali, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum AHB.

Hinc, ſubtrahendo terminos ſecundæ rationis ex terminis primæ, erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; & conſequenter latera horum quadratorum CG, CH, CA, CB pariter proportionalia erunt. Sed, ob eadem triangula æquiangula CEG, CFH, CG eſt ad CH, ut CE ad CF. Itaque erit ex æquali, ut CA ad

CB,

CB, ita CE ad CF : & propterea, ſicuti duæ CA, CB inter ſe ſunt æquales; ſic & duæ CE, CF ſimiliter inter ſe æquales erunt.

II. *Recta, per centrum ducta, quæ uni hyperbolarum oppoſitarum occurrit, debet etiam cum altera convenire.*

Fig. 31.

II. Verum quidem eſt, illud hic a nobis aſſumptum eſſe, ut *recta, per centrum ducta, quæ uni hyperbolarum oppoſitarum occurrit, debeat quoque cum altera convenire*. Sed facile erit, tum iſtud oſtendere, tum alia etiam ratione probare, quod recta, per centrum ducta, & ad hyperbolas oppoſitas terminata, bifariam in ipſo centro ſecetur.

Ducatur enim ex centro C ad unam ex hyperbolis oppoſitis recta CE. Tum, demiſſa ad diamerrum AB ordinata EG, capiatur CH æqualis CG. Erigatur deinde ad partem contrariam ordinata alia HF. Ac denique jungatur recta CF.

Quia igitur æquales ſunt inter ſe, tam duæ CA, CB, quam duæ CG, CH; erunt pariter æquales duæ AG, BH. Unde æqualia itidem erunt inter ſe, tam rectangula AGB, AHB, quam quadrata ordinatarum EG, FH, quæ rectangulis iis proportionalia ſunt.

Hinc, quum duo triangula CGE, CHF habeant duo latera CG, EG æqualia duobus lateribus CH, FH, alterum alteri, & æquales etiam angulos, ſub iis lateribus contentos; omnia alia pariter æqualia habebunt.

Duæ igitur CE, CF æquales erunt inter ſe. Sed eædem, ob æquales angulos ECG, FCH, jacent etiam in directum. Quare recta CE, producta verſus centrum, conveniet cum hyperbola oppoſita in F, totaque EF bifariam ſecabitur in ipſo centro.

III. Ut

III. Ut autem pateat, quod ſit diameter hyperbolarum oppoſitarum recta quælibet, ducta per centrum, & ad eas terminata; *oſtendendum eſt prius ſequens theorema*. Nimirum, quod ſi EF ſit aliqua iſtarum rectarum, eaque biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela ducatur OL; ſit ſemper, ut CL ad CG, ita CG ad CA.

III. *Theorema fundamentale pro determinandis hyperbolæ diametris aliis.* FIG. 31.

Nec ſane difficile erit theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, ducta ad diametrum AB ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipſius AL. Unde, quum ſit etiam diameter AB dupla ipſius AC; erit tota NB dupla pariter totius LC: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

Et quoniam MN dupla eſt etiam ipſius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod ſit ex OL. Quare erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita OL quadratum ad rectangulum ALC. Sed, propter hyperbolam, MN quadratum eſt ad rectangulum ANB, ut EG quadratum ad rectangulum AGB. Itaque erit ex æquali, ut OL quadratum ad rectangulum ALC, ita EG quadratum ad rectangulum AGB; & conſequenter permutando erit quoque, ut OL quadratum ad EG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB.

Hinc, quum, ob triangula æquiangula COL, CEG, OL quadratum ſit ad EG quadratum, ut CL quadratum ad CG quadratum;

tum; erit rurſus ex æquali, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB: & propterea, ſubtrahendo terminos ſecundæ rationis ex terminis primæ; erit etiam, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ACL ad AC quadratum, hoc eſt, ita CL ad AC: proindeque tres rectæ CL, CG, CA continue proportionales erunt.

IV. *Præcedentis theorematis conſectarium primum.* FIG. 31.

IV. Inde vero *ſequitur primo*, quod ſi ex punctis A, & E ducantur rectæ AK, EI, ipſis EG, AM parallelæ, quarum prior AK conveniat cum EF in puncto K, & altera EI cum AB in puncto I; triangulum EGI ſit æquale trapetio AGEK.

Eſt enim ex oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; ſive etiam, ut CA ad CI. Quare erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI: & propterea, quum tres rectæ CG, CA, CI ſint continue proportionales; erit quoque, ut CG ad CI, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CEG, CEI, CG eſt ad CI, ut eſt triangulum CEG ad triangulum CEI; itemque, ob ſimilia triangula CEG, CKA, CG quadratum eſt ad CA quadratum, ut triangulum CEG ad triangulum CKA. Quare erit rurſus ex æquali, ut triangulum CEG ad triangulum CEI, ita idem triangulum CEG ad triangulum CKA.

Hinc triangula duo CEI, CKA æqualia erunt inter ſe: & propterea, dempto ex iis communi triangulo CEG, ſupererit triangu-

lum

lum EGI æquale trapetio AGEK. Et ſi auferatur adhuc commune trapetium AGEX; remanebit quoque triangulum XAI æquale triangulo XEK.

V. Iiſdem poſitis, *ſequitur ſecundo*, quod triangulum AOK ſit æquale trapetio EOAI. *V. Conſectariumſecundum.*

Eſt enim ex oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque CG eſt ad CA, ut CE ad CK. Quare erit ex æquali, ut CO ad CE, ita CE ad CK: & propterea, quum tres rectæ CO, CE, CK ſint continue proportionales; erit quoque, ut CO ad CK, ita CO quadratum ad CE quadratum. FIG. 31.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CAO, CAK, CO eſt ad CK, ut eſt triangulum CAO ad triangulum CAK; itemque, ob ſimilia triangula CAO, CIE, CO quadratum eſt ad CE quadratum, ut triangulum CAO ad triangulum CIE. Quare erit rurſus ex æquali, ut triangulum CAO ad triangulum CAK, ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE.

Hinc triangula duo CAK, CIE æqualia erunt inter ſe: proindeque, dempto ex iis communi triangulo CAO, ſupererit triangulum AOK æquale trapetio EOAI. Id vero erui quoque poteſt ex æqualitate triangulorum XAI, XEK ſuperius oſtenſa. Nam, addito iis communi trapetio AOEX, fiet trapetium EOAI æquale triangulo AOK.

VI. Capiatur porro in hyperbola punctum quodvis aliud P, ex quo ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, *VI. Conſectarium tertium.*

EG

FIG. 31, 32. EG parallelæ. Et *facile erit oſtendere*, quod triangulum PQS ſit etiam æquale correſpondenti trapetio AQRK.

Quum enim ſimilia ſint triangula CAK, CGE; erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita triangulum CAK ad triangulum CGE. Quare, ſubtrahendo antecedentes ex conſequentibus, erit etiam, ut CA quadratum ad rectangulum AGB, ita triangulum CAK ad trapetium AGEK.

Eadem ratione, quum ſimilia ſint triangula CAK, CQR; erit, ut CA quadratum ad CQ quadratum, ita triangulum CAK ad triangulum CQR. Unde, ſubtrahendo antecedentes ex conſequentibus, erit quoque, ut CA quadratum ad rectangulum AQB, ita triangulum CAK ad trapetium AQRK.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut rectangulum AGB ad rectangulum AQB, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK; adeoque, quia, propter hyperbolam, rectangulum AGB eſt ad rectangulum AQB, ut EG quadratum ad PQ quadratum; erit ex æquali, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK.

Et quoniam ex conſtructione parallelæ ſunt inter ſe, tam duæ EG, PQ, quam duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS ſimilia erunt. Unde, quum ſit, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita triangulum EGI ad triangulum PQS; erit rurſus ex æquali, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: & pro-

pte-

pterea, quemadmodum triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale trapetio AQRK.

Notetur autem hic velim, quod ſi punctum P ſumatur in hyperbola oppoſita, quæ tranſit per verticem alterum B; tunc loco trapetii AQRK capienda ſit differentia triangulorum CAK, CQR, quam in omni caſu trapetium illud adæquat. Et demonſtratio adhuc eſt eadem.

VII. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum recta EF in puncto V, *nullo negotio oſtendemus quoque*, quod triangulum PVR ſit æquale correſpondenti trapetio EVSI. VII. *Conſectarium quartum.*

Ponamus etenim primo, quod punctum S ſit ſupra verticem A, & quod punctum P exiſtat inter A, & E. Quia igitur triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK, & triangulum PQS æquale trapetio AQRK: ſi ex triangulo auferatur triangulum, ex trapetio trapetium, ex utroque autem commune trapetium PQGZ; ſupererit trapetium EZSI æquale trapetio PZER: proindeque, addito communi triangulo EZV, fiet trapetio EVSI æquale triangulum PVR. Fig. 31.

Ponamus ſecundo, quod punctum S ſit quidem ſupra verticem A, ſed quod punctum P ſit ad alteram partem puncti E relate ad eundem verticem A. Et rurſus, quia triangulum EGI oſtenſum eſt æquale trapetio AGEK: addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale trapetio AQRK, ſive etiam triangulo PQS; & proinde, dempto communi Fig. 31.

ni

ni trapetio VSQR, fiet trapetio EVSI rurſus æquale triangulum PVR.

FIG. 32. Ponamus denique, quod punctum S ſit infra verticem A. Et quoniam triangulum PQS oſtenſum eſt æquale trapetio AQRK: addito, vel dempto communi trapetio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapetio ASVK. Sed, propter æqualitatem triangulorum XEK, XAI, ſuperius oſtenſam, trapetium ASVK eſt æquale trapetio EVSI. Quare etiam triangulum PVR æquale erit trapetio EVSI.

Hic quoque notare oportet, quod ſi punctum P capiatur in hyperbola oppoſita; tunc loco trapetii EVSI ſumenda ſit differentia triangulorum CEI, CVS, quam in omni caſu trapetium illud adæquat. Nec diverſa erit demonſtratio.

VIII. *Oſtenditur, quod omnis recta, ducta per centrum, & ad hyperbolas oppoſitas terminata, ſit diameter ipſarum.*

VIII. His præmiſſis, facile modo erit oſtendere, quod *ſit diameter hyperbolarum oppoſitarum recta quælibet, ducta per centrum, & ad eas terminata*. Ut enim talis eſſe poſſit, duo quidem requiruntur. Primum, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque terminatas ad eandem hyperbolam. Deinde, ut quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſint, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus ipſius portionibus continentur.

FIG. 31. 32. Jam horum utrumque facili negotio demonſtrabitur. Quantum enim ad primum, ſit EF recta quævis ducta per centrum C, eaque biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A diametri principalis. Dico, eandem EF ſecare quoque bifariam in V, quamvis aliam rectam PP, quæ ipſi AM parallela,

utrin-

utrinque ad unam hyperbolarum terminatur.

Poſitis enim omnibus, ut ſupra; erit utrumque triangulorum PVR, PVR æquale trapetio EVSI. Quare æqualia erunt inter ſe ipſa duo triangula PVR, PVR. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt, ut quadrata laterum homologorum PV, PV. Itaque latera iſthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & conſequenter tota PP bifariam ſecta erit in V.

IX. Quantum vero ad ſecundum, *nec etiam magno mentis acumine opus eſt, ad illud oſtendendum*. Maneant enim omnia adhuc, ut ſupra. Et dico inſuper, quadrata ipſarum AO, PV eſſe inter ſe, ut rectangula correſpondentia EOF, EVF.

IX. *Pars altera demonſtrationis, qua præcedens veritas evincitur.*

FIG. 31. 32.

Quum enim ſimilia ſint triangula CEI, COA; erit, ut CE quadratum ad CO quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum COA. Quare, ſubtrahendo antecedentes ex conſequentibus, erit etiam, ut CE quadratum ad rectangulum EOF, ita triangulum CEI ad trapetium EOAI.

Eadem ratione, quum ſimilia ſint triangula CEI, CVS; erit, ut CE quadratum ad CV quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum CVS. Unde, ſubtrahendo antecedentes ex conſequentibus, erit quoque, ut CE quadratum ad rectangulum EVF, ita triangulum CEI ad trapetium EVSI.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF, ita trapetium EOAI ad trapetium EVSI: adeoque, quia trapetia

iſta oſtenſa ſunt æqualia triangulis AOK, PVR; erit ex æquali, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

Quoniam vero ex conſtructione parallelæ ſunt inter ſe, tam duæ AK, PR, quam duæ AO, PV; triangula duo AOK, PVR ſimilia erunt. Quare, quum ſit, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita triangulum AOK ad triangulum PVR; erit rurſus ex æquali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

X. *Recta, intra unam hyperbolarum ſubtenſa ducta æquidiſtanter, utrinque ad eam terminatur.*

X. Non inficior, illud hic a nobis aſſumptum eſſe, ut *recta, quæ intra unam hyperbolarum ſubtenſæ ducitur æquidiſtanter, utrinque ad eandem hyperbolam terminetur*. Sed haud difficile erit, tum iſtud oſtendere, tum alia etiam ratione probare, quod rectæ omnes,

FIG. 32. ipſi AM æquidiſtantes, & ad eandem hyperbolam utrinque terminatæ, biſariam ſecentur a recta EF.

Jam enim de rectis, quæ ducuntur intra ſegmentum hyperbolicum AEM, res eſt extra omnem dubitationis aleam poſita. Itaque ducatur extra illud ſegmentum recta quævis PV, ipſi AM parallela. Et, ſi fieri poteſt, occurrat hyperbolæ tantum ex una parte in P. Extendatur ea ad partem aliam verſus V, & fiat VP æqualis ipſi PV. Oſtendendum eſt igitur, hoc aliud punctum P eſſe etiam in hyperbola.

Ponantur omnia, ut ſupra. Et quoniam duæ PV, VP inter ſe ſunt æquales, erit triangulum PVR, ad unam partem exiſtens, æquale

le triangulo PVR, quod exiſtit ad partem alteram. Sed illud, propter hyperbolam, eſt æquale trapetio EVSI, ſive etiam ASVK. Quare eidem trapetio ASVK hoc etiam æquale erit: & propterea utrumque triangulorum PQS erit æquale correſpondenti trapetio AQRK; eritque adeo, ut triangulum PQS ad triangulum PQS, ita trapetium AQRK ad trapetium AQRK.

Jam, ob ſimilitudinem triangulorum PQS, PQS, triangulum PQS eſt ad triangulum PQS, ut PQ quadratum ad PQ quadratum. Itemque, ob diametrum AB, biſectam in centro C, trapetium AQRK eſt ad trapetium AQRK, ut rectangulum AQB ad rectangulum AQB. Quare erit ex æquali, ut PQ quadratum ad PQ quadratum, ita rectangulum AQB ad rectangulum AQB: & propterea, ſicuti punctum unum P eſt in hyperbola, ſic etiam locabitur in hyperbola punctum aliud P.

Verum quidem eſt, quod recta PV ducta ſit a nobis intra eandem illam hyperbolam, in qua reperitur ſubtenſa AM. Sed facile erit, eandem demonſtrationem ad eas etiam rectas transferre, quæ intra hyperbolam aliam ducuntur æquidiſtanter ipſi AM, ſi recordemur, quod in eo caſu loco trapetii AQRK capienda ſit differentia triangulorum CAK, CQR; & loco trapetii EVSI differentia triangulorum CEI, CVS.

XI. Non ergo dubitari poteſt, quin recta EF, ducta per centrum C, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminata, ſit diameter ipſarum. Nam & bifariam dividit rectas omnes,

XI. Quod ea tantum recta ſint hyperbolarum oppoſitarum dia-

metri, quæ tranſeunt per centrum, & utrinque ad eas terminantur.

nes, quæ ſubtenſæ AM æquidiſtantes, utrinque ad unam ex ipſis hyperbolis terminantur. Et quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſervant inter ſe eandem rationem, quam habent rectangula, ſub correſpondentibus ipſius EF portionibus contenta.

FIG. 31. 32.

Sed facile erit etiam oſtendere, quod *præter eas, quæ tranſeunt per centrum, & ad hyperbolas oppoſitas terminantur, nulla alia recta linea poſſit eſſe diameter illarum.* Ut enim recta aliqua eſſe queat diameter hyperbolarum oppoſitarum, illud primo requiritur, ut bifariam ſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad unam ex ipſis hyperbolis terminatas. Unde, ſi oſtendi poſſit, accidens iſtud iis tantummodo rectis competere, quæ tranſeunt per centrum, & ad hyperbolas oppoſitas terminantur; jam veritas ejus, de quo agitur, liquido conſtabit.

Id vero oſtendetur in hunc modum. Sit TY recta poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela eſt ordinatis diametri principalis AB; ſecabit diameter iſta AB bifariam rectas omnes, quæ ipſi TY æquidiſtantes, utrinque ad unam hyperbolarum oppoſitarum terminantur.

Quod ſi autem recta TY non ſit parallela ordinatis diametri principalis AB; utique ejus poſitio debet eſſe talis, ut quæ ei intra unam hyperbolarum ducuntur parallelæ, ad eandem hyperbolam utrinque terminentur. Aliter enim nulla erit diameter, cujus ordinatæ parallelæ ſerunt rectæ TY; quum ordina-

natæ cujuſque diametri debeant utrinque ad eandem hyperbolam terminari.

Id vero quum ita ſit, neceſſe eſt, ut recta AM, ducta ex vertice A æquidiſtanter ipſi TY, ſecet hyperbolam, tranſeuntem per eundem verticem A, in alio puncto M. At, rectas omnes, ipſi AM parallelas, & utrinque ad eandem hyperbolam terminatas, ut modo vidimus, non alia biſecat recta, quam quæ tranſit per centrum C, & bifariam dividit ſubtenſam ipſam AM.

XII. Sed non abs re erit, hic paucis innuere, *qualis eſſe debeat data rectæ poſitio, ut quæ ei ducuntur æquidiſtantes intra unam hyperbolarum, utrinque ad eandem hyperbolam terminentur.* XII.

Qualis eſſe debet poſitio recta, ut quæ ei ducuntur æquidiſtantes, utrinque ad unam hyperbolarum terminentur.

FIG. 33.

Sit igitur TY recta data, quæ non ſit parallela ordinatis diametri principalis AB. Et oporteat, poſitionem definire, quam ea debet habere, ut rectæ, eidem æquidiſtanter ductæ intra unam hyperbolarum, poſſint ad eandem hyperbolam utrinque terminari.

Ducatur ex vertice A recta AX, ipſi TY parallela. Et ſiquidem iſta hyperbolam, tranſeuntem per eundem verticem A, ſecet in alio puncto M; per ea, quæ paulo ante oſtenſa ſunt, omnes rectæ, quæ intra unam hyperbolarum ducuntur æquidiſtanter ipſi AM, cum eadem hyperbola utrinque convenient.

Jam ex ſuperius oſtenſis recta AX ſecabit in puncto alio M hyperbolam, tranſeuntem per verticem A, quotieſcumque portio DF, quam ea abſcindit ex recta DE, diametro BA parallela, minor eſt ea, quæ media eſt propor-

 tio-

tionalis inter diametrum AB, & parametrum ejus AD. Unde non alia eſſe debet poſitio ipſius TY, quam ut recta AX, ei æquidiſtanter ducta, ejuſcemodi portionem ex ipſa DE abſcindere valeat.

XIII. *Demonſtratio determinationis præcedentis.* Fig. 33.

XIII. Neque vero arduum erit, *veritatem hujus determinationis oſtendere*. Ponamus etenim primo, portionem DF mediam illam proportionalem adæquare, punctumque adeo M, in quo recta AX ſecabat hyperbolam, tranſeuntem per verticem A, in infinitum abire.

Si fieri poteſt, recta HR, ipſi AX æquidiſtanter ducta, ſecet aliquam hyperbolarum, puta eandem illam, quæ tranſit per verticem A, in duobus punctis H, & K, ex quibus ordinatæ ad diametrum demittantur GI, KL. Et producatur eadem HR, uſque donec conveniat cum diametro AB in puncto R.

Quia igitur DF eſt media proportionalis inter AB, & AD; erit DF quadratum æquale rectangulo DAB: & propterea AD quadratum erit ad DF quadratum, ut eſt idem AD quadratum ad rectangulum ADB; ſive etiam, ut eſt AD ad AB.

Jam AD quadratum eſt ad DF quadratum, ut eſt HI quadratum ad RI quadratum; itemque AD eſt ad AB, ut eſt idem HI quadratum ad rectangulum AIB. Quare, quum ſit RI quadratum æquale rectangulo AIB; erit, ut BI ad RI, ita RI ad AI; & dividendo, ut BR ad RI, ita AR ad AI.

Simili ratione oſtendemus, RL quadratum eſſe æquale rectangulo ALB; atq; adeo BL

eſſe

eſſe ad RL, ut eſt RL ad AL; ſive etiam dividendo, BR eſſe ad RL, ut eſt AR ad AL. Unde, quum ordinando ſit, ut RI ad RL, ita AI ad AL; erit convertendo, ut RI ad IL, ita AI ad eandem IL. Quod fieri non poteſt.

Ponamus ſecundo, portionem DF majorem eſſe ea, quæ media eſt proportionalis inter diametrum AB,& ejus parametrum AD: ita, ut punctum M migret in hyperbolam oppoſitam. Quumque in hoc caſu recta AX magis ad diametrum inclinetur; multo minus recta HR, ei æquidiſtanter ducta, ſecare poterit in duobus punctis eandem hyperbolam.

XIV. Hinc autem *illud prono alveo ſequitur*, quod ſi intra aliquam hyperbolarum oppoſitarum, velut intra eam, quæ tranſit per verticem A, ducatur recta HK utrinque ad eam terminata, nec æquidiſtans ordinatis diametri AB; ſemper ex vertice A duci poſſit recta alia AX, quæ ei parallela, ſecet in puncto alio eandem hyperbolam.

XIV. *Elegans ejuſdem determinationis conſectarium.*

FIG. 33.

Si enim fieri poteſt, recta AX non ſecet in puncto alio hyperbolam, tranſeuntem per verticem A. Itaque per ea, quæ mox oſtenſa ſunt, etiam recta HK, quæ ei eſt parallela, ſecabit in unico puncto eandem hyperbolam. Sed ex hypotheſi recta HK utrinque ad hyperbolam illam terminatur; adeoque eam ſecat in duobus punctis. Quare etiam recta AX conveniet cum hyperbola illa in puncto alio.

Id vero quum ita ſit, perſpicuum eſt quoque, non poſſe rectam aliquam utrinque ad unam hyperbolarum terminari, niſi omnes aliæ, quæ ei ducuntur æquidiſtantes, utrin-

que etiam conveniant, vel cum eadem hyperbola, vel cum ejus oppoſita. Quod tamen intelligi debet, ubi aliæ iſtæ rectæ intra aliquam ipſarum hyperbolarum ductæ fuerint.

C A P. IV.

Diametrorum hyperbolæ communia quædam demonſtrantur.

I. *Proprietates diametri principalis ad omnes alias diametros hyperbolæ traducuntur.*

Fig. 34.

I. VIdimus præcedenti capite, hyperbolam, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortitur, alias etiam innumeras habere, quarum quælibet tranſit per centrum, & tum ad ipſam, cum ad ejus oppoſitam terminatur. Sed *communia harum diametrorum*, operæ pretium eſt, ut paulo diſtinctius proſequamur. Quem in finem ſit AB diameter principalis hyperbolæ, centrum punctum D, & EF alia quævis diameter.

Primo igitur, quemadmodum diameter principalis AB ſuas habet ordinatas; ita ſuis quoque refertur ordinatis diameter alia EF. Sunt autem ex oſtenſis ordinatæ iſtæ rectæ illæ omnes, quæ ducuntur æquidiſtanter ſubtenſæ AM, quam ab ipſa EF ſuppono biſectam in puncto O.

Deinde, quemadmodum quadrata ordinatarum diametri principalis AB ſunt inter ſe, ut rectangula, ſub correſpondentibus ejus portionibus contenta; ita & quadrata ordina-

ta-

tarum alterius diametri EF ſunt proportionalia rectangulis, quæ continentur ſub portionibus correſpondentibus ipſius EF.

Unde porro, ſi per verticem E ducatur recta EH ordinatis æquidiſtanter, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit ad rectangulum EOF, veluti eſt EH ad EF; erit in hac eadem pariter ratione quadratum cujuslibet alterius ordinatæ PV ad rectangulum EVF.

Et quemadmodum rectam iſtam EH appellare licebit *parametrum* diametri EF; ita ſi jungatur FH, cum qua conveniat in X ordinata quævis PV; erit PV quadratum æquale rectangulo EVX, & conſequenter majus rectangulo, quod fit ex parametro EH in abſciſſam correſpondentem EV.

Quin & exceſſus ipſius PV quadrati ſuper rectangulum HEV erit ſimiliter rectangulum aliud, quod habens pro ſua latitudine eandem abſciſſam EV, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex parametro EH in ipſam diametrum EF.

II. *Communes quoque ſunt proprietates, quas ex hyperbola deſcriptione deduximus.*

II. Hæc quum ita ſint, perſpicuum eſt, *omnes illas proprietates, quæ hyperbolæ competunt relate ad diametrum principalem, obtinere etiam, quum ad aliam quamvis diametrum hyperbola ipſa refertur.*

Hinc ulterius, ſicuti deſcribitur hyperbola in plano, per ſolas rectarum longitudines, data magnitudine, & poſitione, tam diametro principali AB, quam parametro ejus AD; ſic etiam deſcribi poterit eadem hyperbola, ubi magnitudine, & poſitione datur, tum alia quævis FIG. 34.

vis diameter EF, cum illius parameter EH.

Et ſicuti recta AD, ducta per verticem A ipſius diametri principalis AB, æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingit hyperbolam in ſolo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, ſimiliter ordinatis ſuis æquidiſtanter, dumtaxat in puncto E tanget hyperbolam.

Quin imo, ſicuti omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice A, angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecat aliquam hyperbolarum oppoſitarum; ſic pariter quælibet alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in puncto alio occurret alicui ex iiſdem hyperbolis.

Unde etiam, ſi in plano ipſarum hyperbolarum detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela ordinatis cujuslibet alterius diametri EF, ſemper ex vertice E duci poterit recta alia, quæ ei parallela, unam ex iis hyperbolis ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum contineat cum EH.

III. *Quod ex qualibet hyperbolæ diametro tranſire poſſit in omnes alias.*

III. Sed, his ita ſe habentibus, liquet quoque, quod *ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic viciſſim ex qualibet alia diametro, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes progredi licebit.*

Nam ſemper eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod præcedenti capite oſtenſum eſt relate ad diametrum principalem, po-

terit

terit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alio diametro EF.

Itaque, ſi per centrum hyperbolæ C ducatur recta aliqua AB, quæ biſecet in G ſubtenſam PE, pertinentem ad verticem E; & demiſſa ad diametrum EF ordinata PV, huic per punctum G parallela agatur GR, erit, ut CV ad CR, ita CR ad CE. FIG. 34.

Unde, quum omnes illæ æqualitates triangulorum, trapetiorumque, quas ſuperiori capite proſecuti ſumus relate ad diametrum principalem, obtineant quoque reſpectu ipſius diametri EF; facile erit oſtendere, rectam illam AB eſſe diametrum quoque ipſius hyperbolæ.

Inde enim conficitur, ipſam AB ſecare biſariam rectas omnes, æquidiſtanter ductas ſubtenſæ PE, & utrinque terminatas ad unam hyperbolarum; itemque quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum proportionalia eſſe rectangulis, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius AB continentur.

IV. *Aliæ diametrorum hyperbolæ proprietas communis, reſpiciens rectas, quas biſecat.*

IV. Habent igitur omnes aliæ hyperbolæ diametri eaſdem omnino proprietates cum diametro principali; & ex qualibet earum, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes progredi licet. Sed hyperbolæ diametri, *præter hactenus recenſitas proprietates, plures alias communes habent*, quas non abs re erit hic breviter oſtenſas exhibere.

Ac principio quidem illud nobis eſt oſtendendum, quod *qualibet diameter non alias rectas, utrinque ad unam hyperbolarum terminatas, dividat biſariam, quam quæ ordi-*

di-

dinatim ad ipſam diametrum applicantur.

Sit enim AB hyperbolæ diameter quævis, ſitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Ducatur intra unam hyperbolarum recta PP, quæ utrinque ad hyperbolam illam terminata, non ſit ordinatim applicata diametro AB. Dico, eam ab ipſa diametro AB non poſſe ſecari bifariam.

FIG. 32.

Si enim fieri poteſt, ſecetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam ea non eſt parallela ordinatis ipſius AB; per ea, quæ oſtenſa ſunt in calce capitis præcedentis, duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipſi PP parallela, ſecet in puncto alio hyperbolam, tranſeuntem per eundem verticem A. Ducatur itaque recta iſta, & ſit AM. Tum, biſecta ea in puncto O, jungatur CO, quæ extendatur uſque donec occurrat hyperbolis oppoſitis in punctis E, & F.

Quia igitur recta EF tranſit per centrum C, & biſecat in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A; per ſuperius oſtenſa, ſecabit quoque bifariam in V rectam PP, ipſi AM parallelam. Sed ex hypotheſi recta PP ſecatur bifariam in S. Quare eadem PP biſecta erit, tam in puncto S, quam in puncto V. Quod fieri non poteſt.

V. *Quomodo data hyperbola, ſive centrum, ſive diameter aliqua poteſt reperiri.*

V. Ex eo autem, quod quælibet diameter eas tantummodo rectas, utrinque ad unam hyperbolarum terminatas, bifariam dividat, quæ ordinatim ad ipſam diametrum applicantur: ſequitur per contrarium, ut *ſi aliqua diameter biſecet rectam aliquam, utrinque terminatam*

ad

ad unam hyperbolarum, hæc eſſe debeat diametri illius ordinata.

Unde ulterius conſequitur, ut *ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, quarum quælibet ad unam hyperbolarum ſit utrinque terminata, ea eſſe debeat diameter, atque adeo tranſire per centrum*. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus, & centrum recta alia, hæc velut diameter biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem. Quod fieri non poteſt.

Id vero quum ita ſit, facile erit, *cujuſlibet datæ hyperbolæ, ſive centrum, ſive diametrum aliquam reperire*. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam hyperbolam, vel etiam intra ejus oppoſitam rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad eandem terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit; ſic & punctum, quod biſecat diametrum iſtam, ejuſdem centrum exhibebit.

VI. *Quod in omni hyperbola reperire liceat diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat.*

VI. Speciatim in omni hyperbola reperire licet *diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat*. Inveniatur ſiquidem ipſius datæ hyperbolæ diameter quævis EF, ſitque EH recta illa, cui omnes iſtius diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ. Jamque, ſi angulus FEH fuerit rectus, erit ipſa EF diameter optata. Quod ſi ſecus contigerit, inveniemus diametrum, quam quærimus, ſequenti ratione. Fig. 36.

Super diametro EF verſus eam partem, in qua recta EH conſtituit cum eadem EF angulum acutum, deſcribatur ſemicirculus EPF, qui

qui neceſſario ſecabit hyperbolam, tranſeuntem per verticem E, in puncto aliquo P. Jungatur deinde recta PE, quæ ſecetur bifariam in puncto G. Agatur porro per punctum iſtud G diameter AB; atque hæc eam, quam quærimus, exhibebit.

Ob rectas enim PE, EF biſectas in punctis G, & C, GE eſt ad GP, ut CE ad CF. Quare, juncta recta PF, erit diameter AB ipſi PF parallela; adeoque angulus CGE æqualis erit angulo FPE. Sed, propter ſemicirculum, angulus FPE eſt rectus. Itaque etiam angulus CGE rectus erit; & conſequenter diameter AB cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituet.

Quod autem ſemicirculus, deſcriptus ſuper diametro EF verſus eam partem, in qua recta EH conſtituit cum ipſa EF angulum acutum, ſecare debeat hyperbolam, tranſeuntem per verticem E, in puncto aliquo P; facili quidem negotio oſtendetur.

Quum enim angulus FEH non ſit major omni angulo acuto rectilineo, poteſt quidem ex puncto E duci recta alia, quæ conſtituat cum eadem EF angulum acutum, majorem angulo FEH. Sed recta iſta ſecare debet, tum hyperbolam, tranſeuntem per verticem E, cum ipſum ſemicirculum. Quare ſemicirculus, & hyperbola etiam inter ſe mutuo convenient.

VII. *De axe hyperbolæ, & quod circulus, ſuper eo deſcriptus, nec ipſam, nec ejus oppoſitam ſecet.*

VII. In qualibet igitur hyperbola exiſtit diameter, quæ rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituit. Diametrum iſtam vocabimus in poſterum *axem* ipſius hyperbolæ. Et facile erit oſtendere, quod *circulus, ſuper axe velut diametro deſcriptus, medius cadat inter*

utram-

utramque hyperbolam, nec ulli ipſarum occurrere poſſit.

Sit enim AB axis hyperbolarum oppoſitarum, ſuper quo velut diametro circulus deſcribatur. Dico, circulum iſtum nulli earum hyperbolarum occurrere. FIG. 37.

Quoniam enim axis AB rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituit; perpendiculares, quæ ſuper ipſo eriguntur ex punctis A, & B, velut parallelæ ejus ordinatis, dumtaxat in punctis illis contingent hyperbolas. Sed eædem perpendiculares cadunt etiam extra circulum. Quare mediæ erunt inter circulum, & hyperbolas, circulo adjacentes: proindeque ipſe circulus cum neutra hyperbolarum conveniet.

VIII.
De angulis, quos aliæ hyperbolæ diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt.
FIG. 37.

VIII. Jam, *ut aliqua dicamus de angulis, quos aliæ hyperbolæ diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt*, ſit AB axis ipſius hyperbolæ; & ducta ex vertice ejus A ſubtenſa quavis AM, ſit EF diameter, quæ biſecat in O iſtam ſubtenſam, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit; jungaturque BM.

Quia igitur AC eſt ad CB, ut AO ad OM; erit BM ipſi EF parallela: proindeque angulus AMB erit æqualis angulo AOC, quem diameter cum ordinata ad plagam unam, conſtituit. Unde aliæ hyperbolæ diametri cum ordinatis ſuis, ſaltem ad partem unam, non alios angulos continebunt, quam quos continent rectæ, quæ ex verticibus axis ad ipſa hyperbolæ puncta ducuntur.

Nullum vero horum angulorum rectum eſſe poſſe, ſed quemlibet acutum exiſtere; jam exin-

exinde conſequitur, quod circulus, qui deſcribitur ſuper AB, velut diametro, medius cadat inter ipſas hyperbolas, nec ulli earum occurrat. Eoſdem autem minores ſemper, ac minores fieri, prout ipſorum vertices magis, atque magis ab ipſo axe recedunt, tandemque prorſus evaneſcere, quum infinite diſtant ab eodem axe; haud difficile erit oſtendere.

Si enim, demiſſa ad axem illum AB ordinata MN, capiatur CQ æqualis CN, & ad punctum Q ducatur ordinata alia PQ; ob æqualia rectangula ANB, AQB, erunt etiam æqualia quadrata earum ordinatarum MN, PQ: proindeque ſegmentum circuli, tranſiens per tria puncta A, M, B, tranſibit quoque per punctum P. Unde, ſicuti ſegmentum iſtud eo majoris ſit latitudinis, quo puncta M, & P magis ab axe recedunt; ſic & ipſi anguli AMB, APB eo minores evadunt, quo minor eſt ſuorum verticum ab eodem axe diſtantia.

IX.
Diametri ab ordinatis, ſuper iis ductis ab alternis earum verticibus, dividuntur in eadem ratione.

IX. Sed, ut ad communes diametrorum proprietates rurſus revertamur, illud etiam omnibus accidit, ut *ordinatæ, quæ ad duas quaſcumque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividant ipſas diametros in eadem ratione.*

Fig. 37.

Sint enim AB, EF duæ quævis diametri hyperbolæ. Et ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF. Dico, fore, ut BG ad AG, ita FO ad EO.

Extendatur ordinata una AO, uſque donec

nec occurrat hyperbolæ ad partem alteram in M; tumque agatur per punctum O recta OL, ipſi EG parallela, quæ conveniat cum diametro AB in puncto L.

Et quoniam ſubtenſa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, tranſeuntem per centrum C; erit ex ſuperius oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Unde, quum CL ſit ad CG, ut eſt CO ad CE; erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CO ad CE.

Quoniam vero invertendo CA eſt ad CG, ut CE ad CO; ſubductis antecedentibus ex conſequentibus, erit, ut CA ad AG, ita CE ad EO; & ſumendo antecedentium dupla, erit etiam, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Unde demum componendo erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO.

X. Hujus autem proprietatis ope, facile erit, *in hyperbolis oppoſitis cujuſcumque diametri poſitionem ſuarum ordinatarum definire.* X. *Quomodo definiri poteſt poſitio ordinatarum cujuſq; diametri.*

Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra unam hyperbolarum recta quævis PP. Tum, ſecta ea bifariam in V, jungatur CV, quæ extendatur in E, & F. Fig. 37.

Agatur porro ex vertice A recta AM, ipſi PP parallela, quæ diametro EF occurrat in O. Et ſiquidem AB ſubinde protrahatur in G, ut BG ſit ad AG, veluti eſt FO ad EO; erit EG ordinata una ipſius AB.

Si enim EG non ſit ordinata ipſius AB, ſit ejus ordinata recta EH. Et quoniam ad diametros AB, EF ex alternis earum vertici-

 bus

bus ductæ ſunt ordinatæ EH , AO ; per proprietatem jam oſtenſam , erit , ut BH ad AH, ita FO ad EO.

Hinc , quum ex conſtructione FO ſit ad EO , ut eſt BG ad AG ; erit ex æquali , ut BG ad AG , ita BH ad AH : & propterea , quum dividendo ſit , ut AB ad AG , ita AB ad AH ; erunt duæ AG , AH æquales inter ſe. Quod fieri non poteſt.

XI. *Diametrorum omnium hyperbolæ alia proprietas communis.*

XI. Commune itidem eſt accidens diametrorum omnium , ut *rectæ , ex cujuſque verticibus per punctum aliquod hyperbolæ ductæ, abſcindant ex qualibet ejus ordinata portiones duas, quæ rectangulum continent, æquale quadrato ipſius ordinatæ.*

Fig.38. Sit enim AB diameter aliqua hyperbolæ. Et , ductis per punctum quodvis E ipſius hyperbolæ rectis AX , BZ , conveniant eæ cum aliqua ejus diametri ordinata MN in punctis P , & Q. Dico , rectangulum PNQ æquale eſſe quadrato ipſius MN.

Ducatur ſiquidem ex puncto E ad eandem diametrum AB ordinata alia EG ; eritque EG quadratum ad rectangulum AGB in ratione compoſita ex EG ad AG, & ex EG ad BG; ſive etiam in ratione compoſita ex PN ad AN , & ex QN ad BN.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PNQ ad rectangulum ANB . Quare erit ex æquali, ut EG quadratum ad rectangulum AGB , ita rectangulum PNQ ad rectangulum ANB.

Ob hyperbolam autem , EG quadratum eſt ad rectangulum AGB , ut MN quadratum ad

ad rectangulum ANB. Itaque erit rurſus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita rectangulum PNQ ad idem rectangulum ANB: & propterea MN quadratum æquale erit rectangulo PNQ.

CAP. V.

De conjugatis diametrorum hyperbolæ; & de curvis, ad quas eæ terminantur.

I. IN hyperbola, non ſecus ac in ellipſi, unaquæque diameter ſuam habet conjugatam. Sed conjugatæ iſtæ diametri, etſi tranſeant per centrum æquidiſtanter ordinatis diametrorum, ad quas velut conjugatæ referuntur; ad hyperbolas tamen oppoſitas minime terminantur, ſed extremitatibus ſuis binas alias hyperbolas conſtituunt, quæ priorum conjugatæ dicuntur.

I. *Recta, per centrum ducta æquidiſtanter ordinatis alicujus diametri, nulli ex hyperbolis occurrit.*

Quod igitur hac in re primo nobis eſt oſtendendum, illud eſt, quod *ſi per centrum hyperbolarum oppoſitarum recta ducatur, parallela ordinatis alicujus diametri, ea cum neutra hyperbolarum poſſit convenire.*

Id vero facili quidem negotio oſtendemus. Sit enim AB hyperbolarum oppoſitarum diameter aliqua, ſitque etiam C centrum earumdem. Ducatur per centrum C recta KL, parallela ordinatis ipſius diametri AB. Dico, rectam iſtam KL cum nulla hyperbolarum poſſe convenire. FIG. 39.

M 2 Nam,

Nam,ſi per vertices diametri A, & B ducantur duæ aliæ rectæ, iiſdem ordinatis æquidiſtantes; eæ, per ſuperius oſtenſa, contingent hyperbolas in iis tantummodo punctis, & totæ cadent extra eas. Sed recta KL interjicitur inter binas illas rectas, & velut iis parallela, eaſdem numquam egreditur. Quare etiam recta KL cum nulla earum hyperbolarum poterit convenire.

Ex ipſa autem demonſtratione perſpicuum eſt, accidens iſtud non tantum competere rectæ KL, quæ ducitur per centrum C æquidiſtanter ordinatis diametri AB; ſed cuilibet alteri rectæ, quæ parallela adhuc iiſdem ordinatis, tranſit per quodvis aliud punctum intermedium ipſius AB. Nam, non ſecus ac recta KL, iſta quoque interjicitur inter rectas, quæ per vertices A, & B ducuntur æquidiſtanter ordinatis diametri AB, nec unquam eas egreditur.

II. *Biſecat tamen rectas omnes, diametro parallelas, & ad utramque hyperbolam terminatas.* FIG. 39.

II. Oſtendemus deinde, quod etſi recta, quæ ducitur per centrum hyperbolarum oppoſitarum æquidiſtanter ordinatis alicujus diametri, cum neutra earum hyperbolarum poſſit convenire; *dividat tamen biſariam rectas omnes, diametro parallelas, & ad hyperbolas oppoſitas terminatas.*

Maneant enim omnia, ut ſupra, & ducatur recta MP, ipſi AB parallela, quæ conveniat cum hyperbolis oppoſitis in punctis M, & P. Dico, rectam iſtam MP ſecari biſariam in V ab ipſa KL.

Demittantur ſiquidem ex punctis M, & P ordinatæ ad diametrum MN, PQ. Et quoniam

niam iſtæ, velut parallelogrammi MQ latera oppoſita, inter ſe ſunt æquales; erunt æqualia pariter rectangula ANB, AQB, quæ illarum quadratis proportione correſpondent.

Hinc, addendo rectangula iſta æqualibus quadratis CA, CB, æqualia erunt quoque tota quadrata CN, CQ; atque adeo æqualia etiam ipſa horum quadratorum latera CN, CQ. Sed, propter parallelogramma CM, CP, duæ CN, CQ ſunt æquales duabus MV, PV. Itaque MV, PV etiam inter ſe æquales erunt: & propterea tota PM biſecta erit in V.

III. Verum quidem eſt, illud hic a nobis aſſumptum eſſe, ut *recta, diametro parallela, quæ uni hyperbolarum oppoſitarum occurrit, debeat quoque cum altera convenire.* Sed haud difficile erit, tum iſtud oſtendere, tum alia etiam ratione probare, quod recta, quæ ducitur æquidiſtanter diametro AB, & ad hyperbolas oppoſitas terminatur, biſariam ſecetur ab ipſa KL.

III. *Recta, diametro parallela, quæ uni ex hyperbolis occurrit, debet quoque cum altera convenire.*

FIG. 39.

Sumatur enim in altera hyperbolarum punctum quodvis M. Tum, demiſſa ad diametrum AB ordinata MN, capiatur GQ æqualis CN. Erigatur deinde ad eandem partem ordinata alia QP, & jungatur MP. Dico, rectam iſtam MP, quæ ad hyperbolas oppoſitas terminatur, parallelam eſſe diametro AB, & ſecari biſariam in V a recta KL.

Nam, quum ſint æquales inter ſe, tam duæ GA, CB, quam duæ CN, CQ; erunt pariter æquales duæ AN, BQ. Unde æqualia itidem erunt inter ſe, tam rectangula ANB, AQB, quam quadrata ordinatarum MN, PQ,

quæ rectangulis iis proportione correſpondent: & propterea, quum duæ MN, PQ inter ſe ſint æquales, & parallelæ; erit etiam MP diametro AB parallela.

Deinde, propter parallelogramma CM, CP, duæ CN, CQ ſunt æquales duabus MV, PV. Sed ex conſtructione duæ CN, CQ inter ſe ſunt æquales. Quare etiam inter ſe æquales erunt duæ MV, PV: proindeque recta MP, non modo parallela erit diametro AB, ſed bifariam quoque ſecabitur in V a recta KL.

IV. *Cujuſmodi eſſe debet recta illa, quæ in hyperbola vices ſubit diametri conjugatæ.*

IV. Etſi autem recta, quæ ducitur per centrum æquidiſtanter ordinatis alicujus diametri, biſariam dividat eas omnes, quæ diametro parallelæ, utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminantur; attamen, niſi ei *vertices*, ſuamque adeo *longitudinem* præſcribamus, multum abeſt, ut *conjugatæ diametri* vices ſubire poſſit, quemadmodum contingit in ellipſi.

Præſcribendi vero ſunt ei *vertices* ea lege, ut *biſecta in ipſo centro, media evadat proportionalis inter diametrum, ad quam refertur, & parametrum ejus*. Nam meminiſſe oportet, in ellipſi conjugatam cujuſque diametri eſſe rectam illam, quæ ducitur per centrum ordinatis ejus æquidiſtanter, quæque bifariam ibidem ſecta, media eſt proportionalis inter ipſam diametrum, & parametrum ſuam.

Itaque, manentibus omnibus, ut ſupra, FIG. 39. dicetur recta KL conjugata diameter ipſius AB, ſiquidem duæ CK, CL ſint æquales inter ſe; tumque etiam tota KL media ſit pro-

por-

Digitized by Google

portionalis inter diametrum AB, & parametrum ejus AD. Qua ratione quadratum cujuſvis ordinatæ MN ad rectangulum ei correſpondens ANB, non modo erit, ut AD ad AB, verum etiam, ut KL quadratum ad AB quadratum.

V. *Quod alia ſit proprietas diametri conjugatæ, quum ordinata ejus ad unam ex hyperbolis terminantur.*

V. Præſcriptis verticibus conjugatæ diametro, ſi velut ejus *ordinatas* habere velimus ſemiſſes earum rectarum, quæ ad hyperbolas oppoſitas terminatæ, bifariam ab ipſa ſecantur; *proprietas ejus alia quidem erit ab ea, quæ competit diametro, ad quam ipſa velut conjugata refertur.*

Fig. 39.

Nimirum accidens ipſius AB eſt, ut quadratum cujuſque ordinatæ MN ſit ad rectangulum ANB, ſive etiam ad differentiam quadratorum CN, CA, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum. Sed proprietas conjugatæ KL eſt, ut quadratum cujuslibet ordinatæ MV ſit ad ſummam quadratorum CV, CK, veluti eſt AB quadratum ad KL quadratum.

Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum; ſive etiam, ut eſt CK quadratum ad CA quadratum. Quare invertendo erit, ut rectangulum ANB ad MN, ſive CV quadratum, ita CA quadratum ad CK quadratum. Et, addendo terminos ſecundæ rationis terminis primæ, erit quoque, ut AN, ſive MV quadratum ad ſummam quadratorum CV, CK, ita CA quadratum ad CK quadratum; ſive etiam, ita AB quadratum ad KL quadratum.

VI. Id autem mirum eſſe non debet. Ne-

VI. *Ratio hujus differentiæ, & neceſſitas determinandi curvas, ad quas conjugatæ diametri terminantur.*

que enim ſemiſſes earum rectarum, quæ ad hyperbolas oppoſitas terminatæ, bifariam a conjugata diametro dividuntur, ſunt *veræ ejus ordinatæ; ſed velut tales haberi debent ſemiſſes illarum, quæ ſuos habent terminos in iiſdem illis curvis, in quibus ipſius conjugatæ vertices locantur.*

FIG. 40.

Plane enim ad eaſdem illas hyperbolas, in quibus exiſtunt vertices diametri AB, terminantur quoque diametri ejus ordinatæ. Sed aliter obtinet in conjugata diametro KL. Rectæ ſiquidem, quas biſecat, & quarum ſemiſſes ut ordinatas ejus habuimus, ſuos habent terminos in hyperbolis oppoſitis; at in iis vertices ipſius KL minime conſiſtunt.

Hinc non abs re erit, *earum curvarum, in quibus conjugatæ diametri vertices locantur, determinationem hic aggredi*. Hunc in finem, ſit EF alia quævis diameter hyperbolarum oppoſitarum. Et ſicuti ipſius AB eſt KL conjugata diameter; ita alterius hujus EF ſit PR diameter conjugata. Inquirendum eſt ergo, cujus naturæ ſint curvæ illæ, quæ tranſeunt per extremitates ipſarum KL, PR.

VII. *Theorema fundamentale pro determinatione earum curvarum.*

FIG. 40.

VII. Jam in hac inquiſitione, *oſtendendum eſt prius ſequens theorema*. Nimirum, quod ſicuti diametri hyperbolarum oppoſitarum AB, EF dividuntur in eadem ratione ab ordinatis EG, AO, quæ ſuper iis demittuntur ex alternis earum verticibus; ita ipſæ ordinatæ EG, AO ſint inter ſe, ut conjugatæ KL, PR earundem diametrorum.

Id vero oſtendemus in hunc modum. Quoniam BG eſt ad AG, ut FO ad EO; erit di-

dividendo, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Unde, quia permutando AB eſt ad EF, tam ut AG ad EO, quam ut BG ad FO; compoſitis rationibus, erit quoque, ut AB quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum EOF; & rurſus permutando, AB quadratum erit ad rectangulum AGB, ut eſt EF quadratum ad rectangulum EOF.

Quia autem, propter hyperbolam, KL quadratum eſt ad AB quadratum, ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit etiam permutando, ut KL quadratum ad EG quadratum, ita AB quadratum ad rectangulum AGB. Et ſimiliter, quia ratione ejuſdem hyperbolæ, PR quadratum eſt ad EF quadratum, ut AO quadratum ad rectangulum EOF; erit adhuc permutando, ut PR quadratum ad AO quadratum, ita EF quadratum ad rectangulum EOF.

Hinc, quum ex æquali KL quadratum ſit ad EG quadratum, ut eſt PR quadratum ad AO quadratum; latera horum quadratorum KL, EG, PR, AO erunt pariter proportionalia. Erit igitur, ut KL ad EG, ita PR ad AO: & propterea permutando ordinatæ duæ EG, AO erunt inter ſe, ut conjugatæ diametrorum KL, PR.

VIII. Inde vero *plura colligi poſſunt, quæ ad ejus, quod quærimus, determinationem ſenſim nos manuducent.* VIII. *Præcedentis theorematis conſectaria.*

Nimirum ſequitur primo, quod ducta ad conjugatam KL recta PQ, ipſi AB parallela, CK ſit ad CQ, ut eſt CE ad CO. Nam CK ad CQ rationem habet compoſitam ex CK ad FIG. 40.

CP,

CP, & ex CP ad CQ. Sed CK eſt ad CP, ut KL ad PR; ſive etiam, ex theoremate oſtenſo, ut EG ad AO. Et, ducta OS, ipſi EG parallela, CP eſt ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione compoſita ex EG ad AO, & ex AO ad OS; hoc eſt in ſimplici ratione, quam habet EG ad OS, vel etiam CE ad CO.

Sequitur ſecundo, quod ducta ad conjugatam PR recta KH, ipſi EF parallela, CP ſit ad CH, ut eſt CA ad CG. Nam CP ad CH rationem habet compoſitam ex CP ad CK, & ex CK ad CH. Sed CP eſt ad CK, ut PR ad KL; ſive etiam, ex theoremate oſtenſo, ut AO ad EG. Et, ducta GV, ipſi AO parallela, CK eſt ad CH, ut EG ad GV. Itaque erit CP ad CH in ratione compoſita ex AO ad EG, & ex EG ad GV; hoc eſt in ſimplici ratione, quam habet AO ad GV, vel etiam CA ad CG.

Ex quibus ſequitur ulterius, CP eſſe ad CH, ut eſt CK ad CQ. Quum enim ordinatæ EG, AO dividant diametros AB, EF in eadem ratione; erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO; & dividendo, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Sed, capiendo ſemiſſes antecedentium, CA eſt ad AG, ut CE ad EO. Itaque, addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut CA ad CG, ita CE ad CO. Jam vero, ex oſtenſis, CA eſt ad CG, ut CP ad CH; itemque CE eſt ad CO, ut CK ad CQ. Quare erit ex æquali. ut CP ad CH, ita CK ad CQ.

IX. *Ejuſdem* IX. Ducatur nunc, tam ad diametrum AB recta EI, ipſi PR parallela, quam ad conjuga-

jugatam ejus K L recta PT, æquidiſtans ipſi *theorematis*
EF. Et ſicuti ex eo, quod CA ſit ad CG, ve- *conſectarium*
luti eſt CE ad CO, oſtendemus, rectangulum *quartum.*
AGB æquale eſſe rectangulo CGI; ita quoque FIG. 40.
ex eo, quod CK ſit ad CQ, ut eſt CP ad CH, *facili negotio demonſtrabimus*, rectangulum KQL eſſe æquale rectangulo CQT.

Quoniam enim eidem PR parallela eſt, tam recta EI, quam recta AO; erunt duæ EI, AO parallelæ etiam inter ſe: proindeque erit ut CI ad CA, ita CE ad CO. Sed CE eſt ad CO, ut CA ad CG. Quare erit ex æquali, ut CI ad CA, ita CA ad CG: & propterea CA quadratum æquale erit rectangulo ICG.

Hinc, addito communi rectangulo AGB, erit etiam CG quadratum æquale duobus rectangulis ICG, AGB. Sed CG quadratum æquale eſt pariter duobus rectangulis ICG, CGI. Itaque duo iſta rectangula ICG, CGI duobus illis ICG, AGB æqualia erunt: & proinde, ablato communi rectangulo ICG, remanebit rectangulum CGI æquale rectangulo AGB.

Eadem autem ratione, quoniam eidem EF parallela eſt, tam recta PT, quam recta KH; erunt duæ PT, KH parallelæ etiam inter ſe: proindeque erit, ut CT ad CK, ita CP ad CH. Sed CP eſt ad CH, ut CK ad CQ. Quare erit ex æquali, ut CT ad CK, ita CK ad CQ: & propterea CK quadratum æquale erit rectangulo TCQ.

Hinc, addito communi rectangulo KQL, erit etiam CQ quadratum æquale duobus rectangulis TCQ, KQL. Sed CQ quadratum

æqua-

æquale eſt pariter duobus rectangulis TCQ, CQT. Itaque duo iſta rectangula TCQ, CQT duobus illis TCQ, KQL æqualia erunt: & proinde, ablato communi rectangulo TCQ, remanebit rectangulum CQT æquale rectangulo KQL.

X. *Conſectarium quintum, quaſitam curvarum determinationem exhibens.*

Fig. 20.

X. Atque hinc modo, ſicuti EG quadratum eſt ad rectangulum AGB, vel ei æquale rectangulum CGI, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum; ita quoque *nullo negotio oſtendemus*, PQ quadratum eſſe ad rectangulum KQL, vel ei æquale rectangulum CQT, ut eſt AB quadratum ad KL quadratum.

Nam EG quadratum ad rectangulum CGI rationem habet compoſitam ex EG ad CG, & ex EG ad IG. Sed, ob triangula æquiangula CGE, PQT, EG eſt ad CG, ut TQ ad PQ. Itemque, ob triangula æquiangula EGI, CQP, EG eſt ad IG, ut CQ ad PQ. Quare EG quadratum ad rectangulum CGI erit in ratione compoſita ex TQ ad PQ, & ex CQ ad PQ.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum CQT ad PQ quadratum. Itaque erit ex æquali, ut EG quadratum ad rectangulum CGI, ita rectangulum CQT ad PQ quadratum. Sed EG quadratum eſt ad rectangulum CGI, ſive AGB, ut KL quadratum ad AB quadratum. Quare erit rurſus ex æquali, ut rectangulum CQT ad PQ quadratum, ita KL quadratum ad AB quadratum; adeoque invertendo PQ quadratum erit ad rectangulum CQT, ut AB quadratum ad KL quadratum.

Ex

Ex eo autem, quod PQ quadratum ſit ad rectangulum CQT, ſive KQL, ut eſt AB quadratum ad KL quadratum; liquet, punctum P locari in hyperbola, cujus KL eſt diameter primaria, & AB ejus conjugata. Sed in ejuſdem oppoſita locabitur quoque punctum R; quandoquidem, ducta RZ, eidem AB parallela, oſtendemus eadem ratione, RZ quadratum eſſe ad rectangulum KZL, ut eſt AB quadratum ad KL quadratum.

XI. Conjugatarum hyperbolarum natura, & affectiones oſtenduntur.

XI. Quod quum ita ſit, manifeſtum eſt, *per extremitates earum rectarum, quæ ſunt conjugatæ diametrorum in hyperbolis oppoſitis, non alias curvas tranſire, quam binas alias oppoſitas hyperbolas*. Atque hinc eſt, ut aliæ iſtæ binæ hyperbolæ priorum *conjugatæ* dicantur; quia ſcilicet diametri priorum hyperbolarum non alias rectas, velut ſuas conjugatas, agnoſcunt, quam quæ ductæ per centrum, ad alias iſtas hyperbolas terminantur.

Jam in aliis hiſce binis hyperbolis, quæ priorum conjugatæ dicuntur, KL eſt diameter primaria, & AB ejus conjugata. Unde eadem ratione hyperbolæ, quæ ipſarum conjugatæ dicendæ ſunt, neceſſe eſt, ut habeat AB velut diametrum primariam, & KL velut ejus conjugatam: & ea propter non aliæ erunt, quam ipſæ priores hyperbolæ. Ex quo patet, quod *ſicuti priorum hyperbolarum conjugatæ diametri ad alias iſtas terminantur, ſic per contrarium conjugatæ diametri iſtarum in iis ſuos terminos debeant habere*. FIG. 40.

Quin etiam, ſi deſcriptis aliis hiſce duabus hyperbolis, fuerit cujuſvis alterius diametri

tri EF priorum hyperbolarum PR conjugata diameter; erit per contrarium EF diameter conjugata ipſius PR in aliis iſtis hyperbolis. Jam enim per id, quod modo oſtenſum eſt, ad priores hyperbolas terminari debet iſtiuſmodi conjugata diameter. Itaque, ſi oſtendi poſſit, ipſi EF parallelas eſſe ordinatas diametri PR; proculdubio erit EF diameter ejus conjugata.

Id vero demonſtrabimus in hunc modum. Quoniam, ex ſuperius oſtenſis, CK eſt ad CQ, ut CP ad CH; ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit quoque, ut CK ad KQ, ita CP ad PH. Sed, ſumptis antecedentium duplis, KL eſt ad KQ, ut PR ad PH. Quare componendo erit pariter, ut LQ ad KQ, ita RH ad PH: & propterea, quemadmodum PQ eſt ordinata diametri KL; ita & KH, quæ eſt ipſi EF parallela, ordinata erit diametri PR.

Patet igitur, quod ſicuti duæ hyperbolæ nequeunt eſſe conjugatæ duarum aliarum hyperbolarum, niſi & iſtæ etiam ſint illarum conjugatæ; ſic in quatuor hiſce hyperbolis nequeat diameter una conjugata eſſe alterius diametri, niſi & iſta pariter ſit conjugata illius. Hinc, quum duæ hujuſmodi diametri ſub contemplationem venient, non modo alteram alterius *conjugatam*, ſed ambas ſimul *conjugatas* diametros appellabimus.

XII. *Quod theorema, paulo ſuperius oſtenſum in hyperbola, obtineat*

XII. Cæterum, priuſquam huic capiti finem imponamus, notetur velim, *theorema illud, ſuperius oſtenſum in hyperbola, de ordinatis, quæ ducuntur ad binas diametros ex alternis earum verticibus, obtinere etiam in ellipſi.*

Elli-

Ellipſis enim ALB ſint AB, EF duæ quævis diametri, ad quas ex alternis earum verticibus ducantur ordinatæ EG, AO; ſintque etiam KL, PR earum diametrorum conjugatæ. Dico, ordinatas EG, AO habere inter ſe eandem rationem, quã habent conjugatæ KL, PR. *etiam in ellipſi.* Fig. 41.

Quoniam enim ordinatæ EG, AO dividunt diametros AB, EF in eadem ratione; erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO: proindeque componendo AB erit ad AG, ut eſt EF ad EO. Sed permutando AB eſt ad EF, tam ut AG ad EO, quam ut BG ad FO. Quare, compoſitis rationibus, erit quoque, ut AB quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum EOF; & rurſus permutando erit, ut AB quadratum ad rectangulum AGB, ita EF quadratum ad rectangulum EOF.

Quia autem, propter ellipſim, KL quadratum eſt ad AB quadratum, ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit etiam permutando, ut KL quadratum ad EG quadratum, ita AB quadratum ad rectangulum AGB. Et ſimiliter, quia ratione ejuſdem ellipſis, PR quadratum eſt ad EF quadratum, ut AO quadratum ad rectangulum EOF; erit adhuc permutando, ut PR quadratum ad AO quadratum, ita EF quadratum ad rectangulum EOF.

Hinc, quum ex æquali KL quadratum ſit ad EG quadratum, ut eſt PR quadratum ad AO quadratum; latera horum quadratorum KL, EG, PR, AO erunt pariter proportionalia. Erit igitur, ut KL ad EG, ita PR ad AO: & propterea permutando ordinatæ duæ

EG,

EG, AO erunt inter ſe in eadem omnino ratione, quam habent conjugatæ diametrorum KL, PR.

CAP. VI.

Parabolæ omnes aliæ diametri determinantur.

I. *Theorema fundamentale pro determinandis parabolæ diametris aliis.*

I. Etſi parabola, perinde ac ellipſis, & hyperbola, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortitur, infinitas alias diametros habeat; in ea tamen omnes aliæ iſtæ diametri, non convergunt ad punctum ullum, ut contingit in hyperbola, & in ellipſi; ſed ſunt omnes tam inter ſe, quam cum ipſa diametro principali parallelæ.

Fig. 42.

Ut autem pateat, quod ſit diameter parabolæ recta quælibet, ducta æquidiſtanter diametro principali; *oſtendendum eſt prius ſequens theorema*. Nimirum, quod ſi AB ſit parabolæ diameter principalis, & aliqua ejus parallela EF biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A; quod, inquam, demiſſa ad diametrum ordinata EG, & ducta per punctum O recta OL, ei parallela, ſit ſemper AG æqualis ipſi GL.

Nec ſane difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, demiſſa ad diametrum ordinata alia MN, erit quoque, tum AN dupla ipſius AL, cum MN dupla ipſius OL, ſive EG: proin-

proindeque MN quadratum erit quadruplum quadrati, quod fit ex EG. Sed, ob parabolam, MN quadratum eſt ad EG quadratum, ut AN ad AG. Quare etiam AN quadrupla erit ipſius AG: & propterea, quum ſit AL dupla ejuſdem AG; duæ AG, GL æquales erunt inter ſe.

II. Præcedentis theorematis conſectarium primum. Fig. 42.

II. Inde vero *ſequitur primo*, quod ſi ex punctis A, & E ducantur rectæ AK, EI, ipſis EG, AM parallelæ, quarum prior AK conveniat cum EF in puncto K, & altera EI cum AB in puncto I; triangulum EGI ſit æquale parallelogrammo AGEK.

Eſt enim, ex theoremate oſtenſo, AG æqualis GL. Sed GL eſt æqualis ipſi EO, ſeu AI. Quare duæ AG, AI etiam inter ſe æquales erunt: proindeque tota GI dupla erit ipſius AG.

Jam triangulum EGI, & parallelogrammum AGEK ſunt in iiſdem parallelis. Quare, quum baſis trianguli GI dupla ſit baſis parallelogrammi AG; erit triangulum EGI æquale parallelogrammo AGEK.

Et hinc patet, æqualia eſſe etiam triangula XAI, XEK; quandoquidem, ſi ex triangulo EGI, & ex parallelogrammo AGEK auferatur commune trapetium AGEX, nonniſi duo illa triangula remanebunt.

III. Conſectarium ſecundum. Fig. 42.

III. Iiſdem poſitis, *ſequitur ſecundo*, quod triangulum AOK ſit æquale parallelogrammo EOAI.

Eſt enim, ex theoremate oſtenſo, AG æqualis GL. Sed AG eſt æqualis ipſi EK, & GL eſt æqualis ipſi EO. Itaque duæ EK, EO

etiam inter ſe æquales erunt; proindeque tota KO dupla erit ipſius EO.

Jam triangulum AOK, & parallelogrammum EOAI ſunt in iiſdem parallelis. Quare, quum baſis trianguli KO dupla ſit baſis parallelogrammi EO; erit triangulum AOK æquale parallelogrammo EOAI.

Poteſt etiam id erui ex æqualitate triangulorum XAI, XEK, ſuperius oſtenſa. Nam, ſi eis addatur commune trapetium AOEX, fiet parallelogrammum EOAI æquale triangulo AOK.

IV. *Conſectarium tertium.* Fig. 42, 43.

IV. Capiatur porro in parabola punctum quodvis aliud P, ex quo ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, EG parallelæ. Et *facile erit oſtendere*, quod triangulum PQS ſit etiam æquale correſpondenti parallelogrammo AQRK.

Quum enim, ex conſtructione, parallelæ ſint inter ſe, tam duæ EG, PQ, quam duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS ſimilia erunt: proindeque erit, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita triangulum EGI ad triangulum PQS. Sed, propter parabolam, EG quadratum eſt ad PQ quadratum, ut AG ad AQ. Itaque erit ex æquali, ut AG ad AQ, ita triangulum EGI ad triangulum PQS.

Jam parallelogramma duo AGEK, AQRK habent eandem altitudinem. Unde, quum ſint inter ſe in eadem ratione rectarum AG, AQ; erit rurſus ex æquali, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita parallelogrammum AGEK ad parallelogrammum AQRK: & propterea, quemadmodum triangulum EGI oſten-

ſum

ſum eſt æquale parallelogrammo AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale parallelogrammo AQRK.

V. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum recta EF in puncto V, *nullo negotio oſtendemus quoque*, quod triangulum PVR ſit æquale correſpondenti parallelogrammo EVSI. V. *Confectarium quartum.*

Ponamus etenim primo, quod punctum S ſit ſupra verticem A, & quod punctum P exiſtat inter A, & E. Quia igitur triangulum EGI oſtenſum eſt æquale parallelogrammo AGEK, & triangulum PQS æquale parallelogrammo AQRK; ſi ex triangulo auferatur triangulum, ex parallelogrammo parallelogrammum, ex utroque autem commune trapetium PQGZ; ſupererit trapetium EZSI æquale trapetio PZER: proindeque, addito communi triangulo EZV, fiet parallelogrammo EVSI æquale triangulum PVR. Fig.42.

Ponamus ſecundo, quod punctum S ſit quidem ſupra verticem A, ſed quod punctum P ſit ad alteram partem puncti E relate ad eundem verticem A. Et rurſus, quia triangulum EGI oſtenſum eſt æquale parallelogrammo AGEK: addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale parallelogrammo AQRK, ſive etiam triangulo PQS: & proinde, dempto communi trapetio VSQR, fiet parallelogrammo EVSI rurſus æquale triangulum PVR. Fig.42.

Ponamus denique, quod punctum S ſit infra verticem A. Et quoniam triangulum PQS oſtenſum eſt æquale parallelogrammo Fig.43.

 AQRK:

AQRK: addito, vel dempto communi trapetio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapetio ASVK. Sed, propter æqualitatem triangulorum XEK, XAI, ſuperius oſtenſam, trapetium ASVK eſt æquale parallelogrammo EVSI. Quare etiam triangulum PVR æquale erit parallelogrammo EVSI.

VI. *Omnis recta, ducta æquidiſtanter diametro principali, eſt etiam parabolæ diameter.*

VI. His præmiſſis, facile modo erit, oſtendere, quod *ſit diameter quoque parabolæ recta quælibet, ducta æquidiſtanter diametro principali*. Ut enim talis eſſe poſſit, duo quidem requiruntur. Primum, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas. Deinde, ut quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſint, ut ipſius portiones correſpondentes.

Jam horum utrumque facili negotio demonſtrabitur. Quantum enim ad primum, ſit EF recta quævis, ducta æquidiſtanter diametro principali AB; eaque biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A ejuſdem diametri. Dico, eandem EF ſecare quoque bifariam in V quamvis aliam rectam PP, quæ ipſi AM parallela, utrinque ad parabolam terminatur.

Fig. 42. 43.

Poſitis enim omnibus, ut ſupra; erit utrumque triangulorum PVR, PVR æquale parallelogrammo EVSI. Quare æqualia erunt inter ſe ipſa duo triangula PVR, PVR. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt, ut quadrata laterum homologorum PV, PV. Itaque latera iſthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & conſequenter tota PP bifariam ſecta erit in V.

VII. Quan-

VII. Quantum vero ad ſecundum, *nec etiam magno labore opus eſt, ad illud oſtendendum*. Maneant enim omnia adhuc, ut ſupra. Et dico inſuper, quadrata ipſarum AO, PV eſſe inter ſe, quemadmodum ſunt portiones correſpondentes EO, EV.

VII. *Pars altera demonſtrationis, qua praecedens veritas evincitur.* FIG. 42. 43.

Quum enim triangulum AOK oſtenſum ſit æquale parallelogrammo EOAI, & triangulum PVR æquale parallelogrammo EVSI; erit, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita parallelogrammum EOAI ad parallelogrammum EVSI.

Jam vero, ob ſimilitudinem triangulorum AOK, PVR, triangulum AOK eſt ad triangulum PVR, ut AO quadratum ad PV quadratum. Itemque, ob communem altitudinem parallelogrammorum EOAI, EVSI, parallelogrammum EORI eſt ad parallelogrammum EVSI, ut EO ad EV. Quare erit ex æquali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita EO ad EV.

VIII. Non inficior, illud hic a nobis aſſumptum eſſe, ut *recta, quæ intra parabolam ſubtenſæ ducitur æquidiſtanter, utrinque ad ipſam parabolam terminetur*. Sed facile erit, tum iſtud oſtendere, tum alia etiam ratione probare, quod rectæ omnes, ipſi AM æquidiſtantes, & utrinque ad parabolam terminatæ, bifariam ſecentur a recta EF.

VIII. *Recta intra parabolam, ſubtenſæ ducta æquidiſtanter, utrinque ad eam terminatur.* FIG. 43.

Jam enim de rectis, quæ ducuntur intra ſegmentum parabolicum AEM, res eſt, extra omnem dubitationis aleam poſita. Itaque ducatur extra illud ſegmentum recta quævis PV, ipſi AM parallela. Et, ſi fieri poteſt, oc-

currat parabolæ tantum ex una parte in P. Extendatur ea ad partem aliam verſus V, & fiat VP æqualis ipſi PV. Oſtendendum eſt, hoc aliud punctum P eſſe etiam in parabola.

Ponantur omnia, ut ſupra. Et quoniam duæ PV, VP inter ſe ſunt æquales; erit triangulum PVR, ad unam partem exiſtens, æquale triangulo PVR, quod exiſtit ad partem alteram. Sed illud, propter parabolam, eſt æquale parallelogrammo EVSI, ſive etiam trapetio ASVK. Quare eidem trapetio ASVK hoc etiam æquale erit: & propterea utrumque triangulorum PQS erit æquale correſpondenti parallelogrammo AQRK; eritque adeo, ut triangulum PQS ad triangulum PQS, ita parallelogrammum AQRK ad parallelogrammum AQRK.

Jam, ob ſimilitudinem triangulorum PQS, PQS, triangulum PQS eſt ad triangulum PQS, ut PQ quadratum ad PQ quadratum; itemque, ob eandem altitudinem parallelogrammorum AQRK, AQRK, parallelogrammum AQRK eſt ad parallelogrammum AQRK, ut eſt AQ ad AQ. Quare erit ex æquali, ut PQ quadratum ad PQ quadratum, ita AQ ad AQ: & propterea, ſicuti punctum unum P eſt in parabola, ſic etiam locabitur in parabola punctum aliud P.

IX.

Quod ea tantum recta ſunt parabola diametri, qua parallela ſunt diametro principali.

IX. Non ergo dubitari poteſt, quin recta EF, ducta æquidiſtanter diametro principali AB, ſit etiam diameter parabolæ. Nam, & bifariam dividit rectas omnes, quæ ſubtenſæ AM æquidiſtantes, utrinque ad parabolam terminantur. Et quadrata ex ſemiſſibus iſtarum recta-

rum

rum ſervant inter ſe eandem rationem, quam habent correſpondentes portiones ipſius EF.

Sed facile erit etiam oſtendere, quod *præter eas, quæ ducuntur æquidiſtanter diametro principali, nulla alia recta linea poſſit eſſe diameter parabolæ*. Ut enim recta aliqua eſſe queat parabolæ diameter, illud primo requiritur, ut bifariam ſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas. Unde, ſi oſtendi poſſit, accidens iſtud iis tantummodo rectis competere, quæ ducuntur æquidiſtanter diametro principali; jam veritas ejus, de quo agitur, liquido conſtabit.

Id vero oſtendetur in hunc modum. Sit TY recta poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam à diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela eſt ordinatis diametri principalis AB; ſecabit diameter iſta AB bifariam rectas omnes, quæ ipſi TY æquidiſtantes, utrinque ad parabolam terminantur. FIG. 42. 43.

Quod ſi autem recta TY non ſit parallela ordinatis diametri principalis AB; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſemper ex vertice A duci poterit recta alia AM, quæ illi parallela, parabolam ſecet in alio puncto. At rectas omnes, ipſi AM æquidiſtanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas, ut modo vidimus, non alia biſecat recta, quam quæ parallela eſt diametro principali AB, & bifariam dividit ſubtenſam ipſam AM.

X. Cæterum *theorema, hoc capite a nobis oſtenſum, pro determinandis aliis parabolæ diametris, colligi etiam poteſt ex eo, quod ſuperius* de- X. *Theorema initio hujus capitis oſten-*

ſum correſpondet ei, quod pro ellipſi, & hyperbola ſuperius attulimus.

demonſtravimus, tum in ellipſi, cum in hyperbola, pro definiendis harum curvarum diametris aliis.

FIG. 23. 31.

Tam enim in ellipſi, quam in hyperbola, poſito, quod AB ſit diameter principalis, & centrum punctum C, ſi EF ſit recta quævis per centrum ducta, quæ biſecet in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CL ad CG, ita CG ad CA; atque adeo ſubducendo, vel antecedentes ex conſequentibus, vel conſequentes ex antecedentibus, erit etiam, ut CL ad GL, ita CG ad AG.

Jam, abeunte in infinitum puncto B, altero diametri vertice, tam ellipſis, quam hyperbola vertitur in parabolam. Et, quia in infinitum etiam abit centrum C, quod biſecat diametrum AB: quemadmodum duæ AC, EC parallelæ fiunt inter ſe; ſic utraque ipſarum CG, CL infinita evadet. Unde, quum earum differentia GL ſit finita; eædem erunt æquales inter ſe: & propterea, quum ſit, ut CL ad GL, ita CG ad AG; etiam AG ipſi GL æqualis erit.

XI. *Correſpondent etiam utriuſque conſectaria, & quid ex infinita centri diſtantia amplius conſequitur.*

FIG. 23. 31.

XI. Quin, & *conſectaria ejuſdem theorematis correſpondent quoque iis, quæ in ellipſi, & hyperbola ex eodem illo theoremate deduximus.* Nam, ubi centrum C in infinitum abire ſupponitur, quemadmodum parallelæ fiunt duæ AC, EC; ſic omnia illa trapetia, quibus æqualia demonſtravimus correſpondentia triangula, in parallelogramma totidem vertuntur.

At-

Atque hinc etiam vera ratio eluceſcit, *cur in parabola diametri omnes inter ſe ſint parallelæ*. Nimirum, quia in ea centrum eſt in infinita diſtantia a vertice principalis diametri; adeoque ejus diametri convergunt ad punctum, infinite diſtans ab eodem vertice.

Sed ex eo, quod centrum in parabola ſit in infinita diſtantia a vertice diametri principalis, liquet quoque, *in eadem curva non poſſe locum habere conjugatarum diametrorum contemplationem*; quippe quæ ſuas poſitiones habent ſimiliter in infinita ab eodem vertice diſtantia.

In poſterum ergo conſiderabimus parabolam, non modo, ut ellipſim, & hyperbolam, cujus diameter eſt infinitæ longitudinis; verum etiam, *ut ellipſim, & hyperbolam, cujus centrum eſt in infinita diſtantia a vertice diametri*. Nam, utraque conſideratione parabolæ proprietates ex iis, quæ ellipſi, & hyperbolæ competunt, deducuntur.

C A P. VII.

Diametrorum parabolæ communia quædam oſtenduntur.

I. EX iis, quæ oſtenſa ſunt in capite præcedenti, abunde liquet, parabolam, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortitur, alias etiam innumeras habere, quæ omnes parallelæ ſunt, tam inter ſe, quam cum

I. *Proprietates diametri principalis ad omnes alias diametros pa-*

rabola traducuntur. FIG. 44.

cum ipſa diametro principali. Sed *communia harum diametrorum* operæ pretium eſt, ut paulo diſtinctius proſequamur. Quem in finem parabolæ AM ſit AB diameter principalis, & EF alia quævis diameter.

Primo igitur, quemadmodum diameter principalis AB ſuas habet ordinatas; ita ſuis quoque refertur ordinatis diameter alia EF. Sunt autem, ex oſtenſis, ordinatæ iſtæ rectæ illæ omnes, quæ ducuntur æquidiſtanter ſubtenſæ AM, quam ab ipſa EF ſuppono biſectam in puncto O.

Deinde, quemadmodum quadrata ordinatarum diametri principalis AB ſunt inter ſe, ut portiones ejus correſpondentes, a vertice ſumptæ; ita & quadrata ordinatarum alterius diametri EF proportionalia ſunt correſpondentibus ejus portionibus, ſimiliter a vertice ſumptis.

Unde porro, ſi per verticem E ducatur recta EH ordinatis æquidiſtanter, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit æquale rectangulo HEO; vocari poterit recta iſta EH *parameter* diametri EF, & erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ PV, ſimiliter æquale rectangulo HEV.

II. *Communes quoque ſunt proprietates, quas ex parabola deſcriptione deduximus.*

II. Hæc quum ita ſint, perſpicuum eſt, *omnes illas proprietates, quæ parabolæ competunt relate ad diametrum principalem, obtinere etiam, quum ad aliam quamvis diametrum parabola ipſa refertur.*

FIG. 44.

Hinc ulterius, ſicuti deſcribitur parabola in plano, per ſolas rectarum longitudines, data diametro principali AB cum magnitudine,

ne, & poſitione parametri AD, quæ ad ipſam refertur; ſic etiam deſcribi poterit eadem parabola, ubi una cum alia quavis diametro EF magnitudine, & poſitione datur illius parameter EH.

Et ſicuti recta AD, ducta per verticem A ipſius diametri principalis AB æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingit parabolam in ſolo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, ſimiliter ordinatis ſuis æquidiſtanter, dumtaxat in puncto E tanget parabolam.

Quin imo, ſicuti omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice A, angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecat parabolam; ſic pariter quælibet alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E, angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in puncto alio occurret eidem parabolæ.

Unde etiam, ſi in plano ipſius parabolæ detur poſitione recta aliqua, quæ non ſit parallela ordinatis cujuslibet alterius diametri EF, ſemper ex vertice E duci poterit recta alia, quæ ei parallela, parabolam ſecet in alio puncto; quum non aliter eſſe queat illi parallela, niſi angulum contineat cum EH.

III. Sed his, ita ſe habentibus, liquet quoque, quod *ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic viciſſim ex qualibet alia diametro, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes progredi licebit.* III. *Quod ex qualibet parabolæ diametro tranſire poſſit in omnes alias.* FIG. 44.

Nam ſemper eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamen-

mentale, quod præcedenti capite oſtenſum eſt relate ad diametrum principalem, poterit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alia diametro EF.

Itaque, ſi ducatur recta aliqua AB, diametro EF æquidiſtanter, quæ biſecet in G ſubtenſam PE, pertinentem ad verticem E; & demiſſa ad diametrum EF ordinata PV, huic per punctum G parallela agatur GR; duæ ER, VR æquales erunt inter ſe.

Unde, quum omnes illæ æqualitates triangulorum, parallelogrammorumque, quas ſuperiori capite proſecuti ſumus relate ad diametrum principalem, obtineant quoque reſpectu ipſius diametri EF; facile erit oſtendere, rectam illam AB eſſe diametrum quoque ipſius parabolæ.

Inde enim conficitur, ipſam AB ſecare bifariam rectas omnes, æquidiſtanter ductas ſubtenſæ PE, & utrinque terminatas ad parabolam; itemque quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum proportionalia eſſe correſpondentibus portionibus ipſius AB, ſumptis a termino A.

IV. *Alia diametrorum proprietas communis, reſpiciens rectas, quas biſecat.*

IV. Habent igitur omnes aliæ parabolæ diametri eaſdem omnino proprietates cum diametro principali; & ex qualibet earum, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes progredi licet. Sed parabolæ diametri, *præter hactenus recenſitas proprietates, plures alias communes habent*, quas non abs re erit hic breviter oſtenſas exhibere.

Ac principio quidem illud nobis eſt oſtendendum, quod *qualibet diameter parabo-*

bo-

bolæ non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividat bifariam, quam quæ ordinatim ad ipſam diametrum applicantur.

Sit enim AB parabolæ AM diameter quævis, ſitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Ducatur in parabola recta PP, quæ utrinque ad curvam terminata, non ſit ordinatim applicata diametro AB. Dico, eam ab ipſa diametro AB non poſſe ſecari bifariam. FIG. 43

Si enim fieri poteſt, ſecetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam ea non eſt parallela ordinatis ipſius AB; ex ſuperius oſtenſis, duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipſi PP parallela, parabolam ſecet in alio puncto. Ducatur itaque recta iſta, & ſit AM. Tum, biſecta ea in puncto O, ducatur per punctum iſtud recta EF, ipſi AB parallela.

Quia igitur recta EF ducta eſt æquidiſtanter diametro AB, & biſecat in O ſubtenſam AM, pertinentem ad verticem A; per ſuperius oſtenſa, ſecabit quoque bifariam in V rectam PP, ipſi AM parallelam. Sed ex hypotheſi recta PP ſecatur bifariam in S. Quare eadem PP biſecta erit, tam in puncto S, quam in puncto V. Quod fieri non poteſt.

V. *Quomodo data parabola diameter aliqua poteſt reperiri.*

V. Ex eo autem, quod quælibet diameter parabolæ eas tantum rectas, utrinque ad curvam terminatas, bifariam dividat, quæ ordinatim ad ipſam diametrum applicantur; ſequitur per contrarium, ut *ſi aliqua parabolæ diameter biſecet rectam aliquam, utrinque terminatam ad parabolam, hæc eſſe debeat diametri illius ordinata.*

Un-

Unde ulterius conſequitur, ut *ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, & utrinque ad parabolam terminatas, ea eſſe debeat diameter ipſius parabolæ, atque adeo cuicumque alteri diametro parallela*. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus recta alia, cuivis diametro parabolæ parallela; hæc velut diameter biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem. Quod fieri non poteſt.

Id vero quum ita ſit, facile erit, *cujuslibet datæ parabolæ diametrum aliquam reperire, & conſequenter poſitionem determinare omnium aliarum diametrorum*. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam parabolam rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit parabolæ; ita & eadem poſitionem omnium aliarum diametrorum exhibebit.

VI. *Quod in omni parabola reperire liceat diametrum, quæ rectos angulos conſtituat cum ſuis ordinatis.* FIG. 45.

VI. Speciatim in omni parabola reperire licet *diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat*. Inveniatur ſiquidem ipſius datæ parabolæ diameter quævis EF, ſitque EH recta illa, cui omnes iſtius diametri ordinatæ debent eſſe parallelæ. Jamque, ſi angulus FEH fuerit rectus, erit ipſa EF diameter optata. Quod ſi ſecus contigerit, inveniemus diametrum, quam quærimus, ſequenti ratione.

Super diametro EF ex vertice ejus E perpendicularis erigatur EP. Et quoniam ea angulum continet cum EH, cui parallelæ ſunt ipſius EF ordinatæ; per ſuperius oſtenſa, neceſſario ſecabit parabolam in puncto alio P.

Se-

Secetur ergo PE bifariam in G, & ducta per punctum iſtud recta AB, ipſi EF parallela; erit AB diameter, quam quærimus.

Quod enim AB ſit diameter parabolæ; id liquet ex eo, quod parallela ſit ipſi EF, quæ ex conſtructione eſt parabolæ diameter. Quod autem cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat; patet etiam abunde. Nam ordinatæ ejus parallelæ ſunt rectæ PE, quam ipſa dividit bifariam: & propterea, ſicuti rectus eſt angulus PEF; ſic etiam, propter parallelas AB, EF, rectus erit angulus PGB.

VII. In qualibet igitur parabola exiſtit diameter, quæ rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituit. Diametrum iſtam vocabimus in poſterum *axem* ipſius parabolæ. Et facile erit oſtendere, quod *in omni parabola nonniſi unicus axis reperiatur.* VII. *De axe parabola, & quod is nonniſi unicus eſſe poſſit.*

Si enim fieri poteſt, parabola AM, præter axem AB, habeat quoque axem alium, qui ſit EF. Et quoniam duo iſti axes, velut parabolæ diametri, inter ſe ſunt paralleli; illæ eædem rectæ, quæ uni axi perpendiculares ſunt, erunt etiam normales ad axem alterum. FIG. 45.

Id vero fieri non poteſt. Quum enim uterque axis cum ordinatis ſuis rectos angulos conſtituat; eædem erunt utriuſque axis ordinatæ. Quare illa eadem recta, quæ utrinque ad parabolam terminata, dividitur bifariam ab axe uno, biſecabitur quoque ab axe altero. Quod plane repugnat.

VIII. Jam, ut *aliqua dicamus de angulis, quos aliæ parabolæ diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt*, ſit AB axis ipſius parabolæ. Et VIII. *De angulis, quos alia parabola dia-*

du-

metri cum ordinatis ſuis conſtituunt.

duƈta ex vertice ejus A ſubtenſa quavis AM, ſit EF diameter, quæ biſecat in O ſubtenſam iſtam, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit.

FIG. 45. Quia igitur AB, EF, velut parabolæ diametri, inter ſe ſunt parallelæ; erit angulus BAM æqualis angulo AOE, quem diameter cum ordinata ad plagam unam conſtituit. Unde aliæ parabolæ diametri cum ordinatis ſuis, ſaltem ad partem unam, non alios angulos continebunt, quam quos ſubtenſæ, pertinentes ad verticem axis, cum ipſo axe conſtituunt.

Nullum vero horum angulorum reƈtum eſſe poſſe, ſed quemlibet acutum exiſtere; jam exinde conſequitur, quod perpendicularis, ereƈta ſuper axe ex vertice ejus, velut parallela ordinatis ipſius axis, tota extra parabolam cadat. Eoſdem autem minores ſemper, ac minores fieri, prout longitudo earum ſubtenſarum major ſemper, atque major evadit; notius eſt, quam ut ulla egeat demonſtratione.

IX.

Ordinatæ, ſuper diametris duƈtæ ab alternis earum verticibus, æquales ex iis portiones abſcindunt.

IX. Sed, ut ad communes diametrorum proprietates rurſus revertamur, illud etiam omnibus accidit, ut *ordinatæ, quæ ad duas quaſcumque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, æquales ex ipſis diametris portiones abſcindant.*

FIG. 46. Sint enim AB, EF duæ quævis diametri parabolæ AM. Et ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF. Dico, portionem AG æqualem eſſe portioni EO.

Extendatur ordinata una AO uſque donec occurrat parabolæ ad partem alteram in M; tumque agatur per punƈtum O reƈta OL, ipſi

ipſi EG parallela, quæ conveniat cum diametro AB in puncto L.

Et quoniam ſubtenſa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, ductam æquidiſtanter diametro AB; duæ AG, GL, ex ſuperius oſtenſis, æquales erunt inter ſe. Sed, ob parallelogrammum EL, æquales quoque ſunt duæ GL, EO. Quare etiam AG ipſi EO æqualis erit.

X. *Quomodo definiri poteſt poſitio ordinatarum cujuſque diametri.*

X. Hujus autem proprietatis ope, facile erit, *cujuſcumque parabolæ diametri poſitionem ſuarum ordinatarum definire.*

Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra parabolam recta quævis PP, quæ utrinque ad ipſam terminetur. Tum, ſecta ea bifariam in V, agatur per punctum iſtud V recta EF, diametro AB parallela. Fig. 46.

Ducatur porro ex vertice A recta AM, ipſi PP æquidiſtanter, quæ diametro EF occurrat in O. Et, ſiquidem ex AB abſcindatur portio AG æqualis portioni EO, jungaturque EG; erit EG ordinata ipſius AB.

Si enim EG non ſit ordinata ipſius AB, ſit ejus ordinata recta EH. Et quoniam ad diametros AB, EF ex alternis earum verticibus ductæ ſunt ordinatæ EH, AO; per proprietatem jam oſtenſam, portiones duæ AH, EO æquales erunt inter ſe. Sed ex conſtructione eidem EO æqualis eſt portio AG. Quare erunt pariter æquales inter ſe duæ AG, AH. Quod fieri non poteſt.

XI. Diametro-

XI. Omnium quoque diametrorum parabolæ commune eſt, ut *ſi per aliquod parabolæ*

rum para- *punctum rectæ duæ ducantur, quarum una*
bola alia *pertineat ad verticem alicujus diametri, altera*
proprietas *ſit ei parallela; eæ abſcindant ex qualibet dia-*
communis. Fig. 47. *metri ordinata portiones duas, quæ rectangu-*
lum continent, æquale quadrato ipſius ordinatæ.

Sit enim AB diameter aliqua parabolæ AM. Et, ductis per punctum quodvis E ipſius parabolæ rectis AX, FZ, quarum prior AX pertineat ad verticem A, altera ſit ipſi diametro parallela, conveniant eæ cum aliqua ejuſdem diametri ordinata MN in punctis P, & Q. Dico, rectangulum PNQ æquale eſſe quadrato ipſius MN.

Ducatur ſiquidem ex puncto E ad eandem diametrum AB ordinata alia EG; eritque, propter parabolam, ut EG, ſive QN quadratum ad MN quadratum, ita AG ad AN. Sed AG eſt ad AN, ut EG, ſive QN ad PN. Itaque erit ex æquali, ut QN quadratum ad MN quadratum, ita QN ad PN: & propterea, quum tres rectæ QN, MN, PN ſint continue proportionales; erit MN quadratum æquale rectangulo PNQ.

Patet autem, hujuſmodi communem diametrorum omnium parabolæ proprietatem correſpondere ei, quam poſtremo loco, tum in ellipſi, cum in hyperbola ſuperius demon-
Fig. 30. ſtravimus. Nam, ubi punctum B, alter dia-
38. metri vertex, in infinitum abire ſupponitur; quemadmodum, tam ellipſis, quam hyperbola vertitur in parabolam; ita recta BX, convergens ad punctum B, abit in rectam aliam, diametro AB parallelam.

XII. Denique omnibus etiam parabolæ dia-

XII. *Alia adhuc communis proprietas diametrorum parabolæ.*

FIG. 47.

diametris accidit, ut *ſi ad aliquam ex iis tres ordinatæ continue proportionales demittantur, quarum extremæ tendant ad contrarias partes; recta, conjungens terminos iſtarum, tranſire debeat per punctum diametri, cui ordinata media correſpondet.*

Sit enim AB diameter aliqua parabolæ AM, ad quam demittantur tres ordinatæ EG, MN, HL, ita ut ipſarum extremæ EG, HL tendant ad partes contrarias. Dico, rectam EH, conjungentem terminos iſtarum, tranſire per punctum N, cui correſpondet ordinata media MN.

Eſt namque, propter parabolam, ut EG quadratum ad MN quadratum, ita AG ad AN. Et ſimiliter, ut MN quadratum ad HL quadratum, ita AN ad AL. Quare, ſicuti tres ordinatæ EG, MN, HL ſunt continue proportionales; ita erunt etiam in continua proportione tres abſciſſæ AG, AN, AL, quæ cum quadratis earum ordinatarum eandem habent rationem.

Quum ergo AG ſit ad AN, ut eſt AN ad AL; erit dividendo, ut GN ad AN, ita LN ad AL; & permutando, ut GN ad LN, ita AN ad AL. Sed AN eſt AL, ut MN quadratum ad HL quadratum, ſive etiam, ut EG ad HL. Quare erit ex æquali, ut GN ad LN, ita EG ad HL: proindeque, quum duæ EG, HL parallelæ ſint inter ſe, recta EH tranſibit per punctum N.

XIII. *Præcedentis proprietatis converſum*

XIII. Sed *converſum hujus proprietatis pariter obtinet*. Nimirum, quod ſi ducatur intra parabolam recta quævis EH, quæ oc-

Demonſtratur. currat parabolæ quidem in punctis E, & H; alicui autem ex ejus diametris AB in puncto

FIG.47. N; ordinata MN, huic puncto correſpondens, ſit media proportionalis inter ordinatas EG, HL, quæ ex iis punctis ſuper diametro AB demittuntur.

Si enim EG non ſit ad MN, ut eſt MN ad HL; capiatur ad eandem partem cum HL ordinata alia KI, quæ ſit tertia proportionalis poſt duas EG, MN. Itaque, per proprietatem jam oſtenſam, recta KE tranſibit per punctum N: & propterea, vel idem habebit ſegmentum cum recta EF, quæ ſimiliter tranſit per punctum N; vel cum ea ſpatium comprehendet. Quorum utrumque repugnat.

Non igitur eſſe poteſt, ut EG ad MN, ita MN ad KI. Quare erit, ut EG ad MN, ita MN ad HL: & propterea tres ordinatæ EG, MN, HL continue proportionales erunt. Sed, quemadmodum ſunt continue proportionales tres ordinatæ EG,MN,HL; ita quoque erunt in continua proportione tres abſciſſæ AG, AN, AL: quippe quæ, ob parabolæ naturam, cum quadratis earum ordinatarum eandem habent rationem.

LI.

LIBER IV.

De Mutua Diametrorum, Parametrorumque Comparatione.

DEmonſtravimus præcedenti libro, conicas ſectiones, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortiuntur, innumeras alias habere, quarum quælibet, ad inſtar principalis, ſuam quoque parametrum habet. Sed non abs re erit, inter ſe mutuo conferre, tum ipſas ſectionum conicarum diametros, cum parametros earundem. Itaque de mutua iſta diametrorum, parametrorumque comparatione agendum nobis erit hoc libro.

CAP. I.

Ellipſis diametri omnes inter ſe mutuo comparantur.

I. VIdimus ſuperius, in qualibet ellipſi binas diametros extare, quæ cum ordinatis ſuis rectos angulos conſtituunt. Binas haſce diametros vocavimus axes ipſius ellipſis. Et demonſtravimus quoque, ellipſim abire in circulum, quum duo ejus axes inter ſe ſunt æquales.

I. Diametrorum ellipſis maxima quidem eſt axis major, minima vero axis minor. FIG. 48

Id quum ita ſit, omnino neceſſe eſt, ut ex duobus axibus ellipſis unus quidem ſit major, alter vero minor. Sed facile erit etiam oſtendere, *diametrorum omnium ellipſis maximam quidem eſſe axem majorem, minimam vero axem minorem.*

Ellipſis enim AKBL ſit AB axis major, & KL axis minor. Sit autem EF alia ejus diameter. Dico, aliam iſtam diametrum EF minorem eſſe axe majore AB, majorem vero axe minore KL.

Demiſſa ſiquidem ad axem majorem AB ordinata EG; erit, ob naturam ellipſis, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed KL quadratum minus eſt quadrato ex AB. Quare etiam EG quadratum minus erit rectangulo AGB.

Hinc, appoſito communi quadrato ex CG, erit pariter CE quadratum minus quadrato, quod ſit ex CA: & propterea, ſicuti CE minor eſt, quam CA; ita quoque erit EF minor, quam AB.

Eadem ratione, demiſſa ad axem minorem KL ordinata EI; erit, propter ellipſim, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita EI quadratum ad rectangulum KIL. Sed AB quadratum majus eſt quadrato ex KL. Quare etiam EI quadratum majus erit rectangulo KIL.

Hinc, appoſito communi quadrato ex CI, erit pariter CE quadratum majus quadrato, quod ſit ex CK: & propterea, ſicuti CE major eſt, quam CK; ita quoque erit EF major, quam KL.

II. Nul-

II. Nullo itidem negotio oſtendi poteſt; quod *omnium aliarum diametrorum illa quidem ſit major, quæ vel minus diſtat ab axe majore, vel magis recedit ab axe minore.*

II.
Ex diametris ellipſis illa major eſt, quæ diſtat, vel minus ab axe majore, vel magis ab axe minore
FIG. 48.

Quum enim CA quadratum ſit æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato, & CE quadratum ſit æquale duobus quadratis EG, CG; erit exceſſus, quo CA quadratum ſuperat CE quadratum, æqualis exceſſui, quo rectangulum AGB ſuperat EG quadratum.

Quia autem rectangulum AGB ad EG quadratum datam habet rationem; habebit idem rectangulum AGB datam quoque rationem ad exceſſum ejus ſuper EG quadratum: proindeque, quum minuitur rectangulum AGB, neceſſe eſt, ut ille pariter exceſſus minuatur.

Hinc etiam exceſſus, quo CA quadratum ſuperat CE quadratum, minor fiet, quotieſcumque minuitur rectangulum AGB. Et inde liquido patet, diametrum EF eo eſſe majorem, quo minus diſtat ab axe majore AB. Nam minui nequit diſtantia iſta, niſi ſimul minuatur quoque rectangulum AGB.

Oſtendi id ipſum poteſt, adhibito axe minore KL. Quum enim CE quadratum ſit æquale duobus quadratis EI, CI; & CK quadratum ſit æquale rectangulo KIL una cum CI quadrato; erit exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CK quadratum, æqualis exceſſui, quo quadratum ex EI ſuperat rectangulum KIL.

Quia autem data eſt ratio inter EI quadratum, & rectangulum KIL; dabitur etiam

ratio inter exceſſum, quo EI quadratum ſuperat rectangulum KIL, & ipſum rectangulum KIL: proindeque, quum augetur rectangulum iſtud, neceſſe eſt, ut ille pariter exceſſus augeatur.

Hinc etiam exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CK quadratum, major fiet, quotieſcumque augetur rectangulum KIL. Et inde liquido patet, diametrum EF eo eſſe majorem, quo magis diſtat ab axe minore KL. Nam augeri nequit diſtantia iſta, niſi ſimul augeatur quoque rectangulum KIL.

III. *Conjugatæ diametri per ordinatas, ſuper iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.*

III. Ellipſis igitur diametri in receſſu ab axe majore minores evadunt, maximamque patiuntur diminutionem, quum maxime diſtant ab axe majore, hoc eſt, quum ad axem minorem perveniunt. Interim, dum eæ minuuntur, augentur ipſarum conjugatæ. Quod ut liquido conſtet, oſtendendum eſt prius ſequens theorema.

Fig. 41.

Nimirum, quod *ſi capiantur in ellipſi binæ quævis conjugatæ diametri, eæ dividantur in eadem ratione ab ordinatis, quæ ſuper iis demittuntur ex verticibus duarum quarumvis aliarum ſimiliter conjugatarum diametrorum.*

Neque vero difficile erit, theorema iſtud oſtendere, ſi eorum recordemur, quæ ſuperius oſtenſa ſunt. Ellipſis enim AKBL ſint AB, KL duæ quævis conjugatæ diametri. Demittantur ad eas ordinatæ EG, PQ ex verticibus duarum quarumvis aliarum ſimiliter conjugatarum diametrorum EF, PR. Dico, fore, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

Ducatur ſiquidem ad diametrum EF ordi-

dinata AO. Tum per punctum O agatur recta OS, ipſi EG parallela. Et jam CK ad CQ rationem habebit compoſitam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ. Sed CK eſt ad CP, ut KL ad PR, ſive etiam, ut EG ad AO; itemque CP eſt ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione compoſita ex EG ad AO, & ex AO ad OS.

Et quoniam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, ſive etiam CE ad CO; erit ex æquali, ut CK ad CQ, ita CE ad CO; & convertendo, ut CK ad KQ, ita CE ad EO. Sed, ſumptis antecedentium duplis, KL eſt ad KQ, ut EF ad EO. Quare dividendo erit, ut LQ ad KQ, ita FO ad EO: & propterea, quum FO ſit ad EO, ut eſt BG ad AG; erit rurſus ex æquali, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

IV. Ex iſto autem theoremate *prono alveo fluit*, quadratum quidem ordinatæ EG eſſe æquale rectangulo KQL; quadratum vero ordinatæ PQ æquale eſſe rectangulo AGB. *IV. Præcedentis proprietatis elegans conſectarium, reſpiciens quadrata earum ordinatarum.*

Quum enim BG ſit ad AG, ut eſt LQ ad KQ; erit componendo, ut AB ad AG, ita KL ad KQ. Unde, quia permutando AB eſt ad KL, tam ut AG ad KQ, quam ut BG ad LQ; compoſitis rationibus, erit, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum KQL. FIG. 41.

Jam, propter ellipſim, AB quadratum eſt ad KL quadratum, tam ut rectangulum AGB ad EG quadratum, quam ut PQ quadratum ad rectangulum KQL. Quare ex æquali, primo quidem erit, ut rectangulum AGB ad re-

ctan-

ſtangulum KQL, ita idem rectangulum AGB ad EG quadratum. Deinde vero, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita PQ quadratum ad idem rectangulum KQL: & propterea rectangulo quidem KQL æquale erit EG quadratum; rectangulo vero AGB erit æquale PQ quadratum.

V. *Quadrata axium ellipſis ſunt æqualia quadratis ex binis ejus diametris conjugatis.*

V. Atque hinc ulterius nullo etiam negotio deducitur, *quadrata, quæ fiunt ex binis ellipſeos diametris conjugatis, ſimul ſumpta eandem ubique ſummam conſtituere, hoc eſt eam, quam quadrata duorum axium conficiunt.*

FIG. 41. Referant enim AB, KL axes ipſius ellipſis, ita ut ordinatæ EG, PQ rectos cum iis angulos conſtituant. Oſtendendum eſt igitur, quadrata, quæ fiunt ex axibus AB, KL, æqualia eſſe quadratis, quæ fiunt ex aliis conjugatis diametris EF, PR. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Quadratum ex CA eſt æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato. Pariterque quadratum ex CK eſt æquale rectangulo KQL una cum CQ quadrato. Duo igitur quadrata CA, CK æqualia erunt duobus rectangulis AGB, KQL una cum duobus quadratis CG, CQ.

Quum autem rectangulo AGB oſtenſum ſit æquale quadratum ex PQ, & rectangulo KQL æquale quadratum ex EG; erunt duo quadrata PQ, EG æqualia duobus rectangulis AGB, KQL: & ideo quadrata duo CA, CK æqualia erunt quatuor quadratis, quæ fiunt ex PQ, EG, CG, CQ.

Jam ex quatuor hiſce quadratis duo PQ, CQ

CQ ſunt æqualia quadrato ex CP; alia verò duo EG, CG ſunt æqualia quadrato ex CE. Quare eadem quadrata CA, CK æqualia erunt duobus quadratis CE, CP; atque adeo quadrata ex totis AB, KL, æqualia erunt pariter iis, quæ fiunt ex totis EF, PR.

VI. *Quum primariæ diametri minuuntur, neceſſe eſt, ut augeantur ipſarum conjugatæ.* FIG. 48.

VI. Ex eo autem, quod quadrata, quæ fiunt ex binis ellipſeos diametris conjugatis, ſimul ſumpta, eandem ubique ſummam conſtituant, facile modo erit oſtendere id, quod nobis ab initio propoſuimus: nimirum, quod *dum primariæ diametri minuuntur in receſſu ab axe majore, viciſſim conjugatæ ipſarum augeantur.*

Maneant enim omnia, ut ſupra, adeo nempe, ut AB ſit axis major ellipſis, KL axis minor, & EF diameter quævis. Sit autem PR conjugata diametri hujus EF. Dico, non poſſe diametrum EF minorem fieri, niſi ipſius conjugata PR viciſſim augeatur.

Nam quadrata ex ipſis EF, PR ſimul ſumpta debent ubique æqualia eſſe quadratis, quæ fiunt ex axibus AB, KL. Quare exceſſus, quo AB quadratum ſuperat EF quadratum, erit ſemper æqualis exceſſui, quo viciſſim PR quadratum ſuperat KL quadratum; & propterea nequit exceſſus ille augeri, niſi iſte pariter augeatur.

Jam, ubi per receſſum ab axe majore AB minor evadit diameter FF, tunc augetur exceſſus, quo AB quadratum ſuperat EF quadratum. Quare in eodem receſſu neceſſe eſt, ut augeatur etiam exceſſus, quo PR quadratum ſuperat KL quadratum; & propterea ipſa PR major evadet.

VII. Non

VII. *Theoremata duo de ratione cujuſvis diametri ellipſis ad ſuam conjugatam.* FIG. 48.

VII. Non igitur dubitari poteſt, quin interea ac primariæ diametri minuuntur in receſſu ab axe majore, viciſſim conjugatæ ipſarum augeantur. Inde autem, ſicuti clare patet, *accedere conjugatas diametros ad axem majorem, ubi primariæ, ad quas velut conjugatæ referuntur, ab eodem axe recedunt*; ſic etiam non obſcure *colligi poſſunt ſequentia duo theoremata.*

Nimirum primo, quod axis major AB ad axem minorem KL majorem dabeat rationem, quam diameter quævis alia EF ad ſuam conjugatam PR.

Quum enim AB major ſit, quam EF; habebit AB ad KL majorem rationem, quam EF ad KL. Sed KL minor eſt, quam PR; atque adeo EF majorem habet rationem ad KL, quam ad PR. Itaque ratio, quam habet AB ad KL multo major erit ratione, quam habet EF ad PR.

Secundo, quod diameter EF, axi majori propinquior, majorem habeat rationem ad ſuam conjugatam PR, quam diameter DH, ab eodem illo axe remotior, ad conjugatam ſuam QS.

Quum enim EF major ſit, quam DH; habebit EF ad PR majorem rationem, quam DH ad PR. Sed PR minor eſt, quam QS; atque adeo DH majorem habet rationem ad PR, quam ad QS. Itaque ratio, quam habet EF ad PR multo major erit ratione, quam habet DH ad QS.

VIII. *Locus omnium dia-*

VIII. Cæterum, ut alia quamplurima, quæ locum habent in comparatione diametrorum

rum ellipſis, tum hic, cum in ſequentibus facilius proſequi valeamus, juvat hic advertere, quod *locus diametrorum omnium ellipſis per dati cujuſdam circuli portionem poſſit exhiberi.* *metrorum ellipſis exhiberi poteſt per dati cujuſdam circuli portionem.*

Referant namque rectæ duæ AC, BC axes ellipſis, hoc eſt AC axem majorem, & BC axem minorem; junctiſque iis ad angulos rectos, deſcribatur ſuper AB ſemicirculus ACB, & agatur per punctum C recta CD, ipſi AB parallela, quæ occurrat circumferentiæ ad partem alteram in D. Dico, portionem ejuſdem circumferentiæ CED conſiderari poſſe veluti locum omnium diametrorum ellipſis. Fig. 49.

Primo enim, ex ſuperius oſtenſis, quælibet ellipſis diameter debet eſſe minor axe majore AC, & major axe minore BC, vel AD. Sed omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad portionem circumferentiæ CED, minores ſunt recta AC, majores vero recta AD. Itaque poterunt rectæ iſtæ omnes ellipſis diametros exhibere.

Deinde, oſtenſum eſt quoque, quadrata ex binis ellipſeos diametris conjugatis, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis axium AC, BC. Sed, inclinatis ad punctum quodvis E ejuſdem portionis CED rectis AE, BE, quadrata iſtarum, velut æqualia quadrato ex AB, adæquant quadrata, quæ fiunt ex ipſis AC, BC. Itaque, ſi AE referat diametrum aliquam primariam ellipſis, erit BE ejus conjugata.

IX. Hoc jacto principio, jam circa comparationem diametrorum ellipſis duo alia theoremata facillime licebit oſtendere. Horum pri- IX. *Theorema de rectangulo, ſub binis*

ellipſeos conjugatis diametris comprehenſo.

FIG. 49.

primum eſt, quod *rectangulum ex binis ellipſeos diametris conjugatis eo majus evadat, quo magis ipſæ diametri ad æqualitatem accedant; & maximum fiat, ubi omnino inter ſe ſunt æquales.*

Ut enim rectæ AC, BC referunt axes ellipſis, ſic rectæ AE, BE referant binas ejus diametros conjugatas. Dico, rectangulum AEB eo majus eſſe relate ad rectangulum ACB, quo duæ AE, BE minus a ſe mutuo differunt; & maximum fieri, quum eædem AE, BE inter ſe ſunt æquales.

Demittantur ſiquidem ſuper AB perpendiculares CF, EG. Jamque iſtarum quadrata proportionalia erunt rectangulis AFB, AGB, quæ iis quadratis ſunt æqualia. Sed rectangulum AFB eſt ad rectangulum AGB in ratione compoſita ex AF ad AG, & ex BF ad BG. Itaque in hac eadem compoſita ratione erit pariter CF quadratum ad EG quadratum.

Jam, aſſumpta communi altitudine AB, AF eſt ad AG, ut rectangulum BAF ad rectangulum BAG, ſive etiam, ut AC quadratum ad AE quadratum. Et ſimiliter, aſſumpta eadem communi altitudine AB, BF eſt ad BG, ut rectangulum ABF ad rectangulum ABG, ſive etiam, ut BC quadratum ad BE quadratum. Quare CF quadratum ad EG quadratum habebit rationem compoſitam ex AC quadrato ad AE quadratum, & ex BC quadrato ad BE quadratum.

Hinc, capiendo latera omnium horum quadratorum, habebit quoque CF ad EG rationem compoſitam ex AC ad AE, & ex

BC

BC ad BE. Sed duæ iſtæ rationes componunt itidem rationem, quam habet rectangulum ACB ad rectangulum AEB. Quare erit ex æquali, ut CF ad EG, ita rectangulum ACB ad rectangulum AEB: ex quo facili negotio propoſiti theorematis veritas conſtat.

X. *Theorema de ſumma duarum ellipſeos conjugatarum diametrorum.*

X. Alterum theorema eſt, quod *ſumma quoque ex binis ellipſeos diametris conjugatis eo major evadat, quo magis ipſæ diametri ad æqualitatem accedunt; & maxima itidem fiat, ubi omnino inter ſe ſunt æquales.*

FIG. 49.

Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, ſummam ex diametris conjugatis AE, BE eo majorem eſſe relate ad ſummam axium AC, BC, quo ipſæ AE, BE minus a ſe mutuo differunt; & maximam fieri, quum eædem AE, BE inter ſe ſunt æquales.

Ex præcedenti theoremate rectangulum AEB relate ad rectangulum ACB ea quidem lege augetur. Itaque etiam duplum illius rectanguli eadem lege augebitur relate ad duplum iſtius. Et, addendo iis commune quadratum ex AB, eadem pariter erit lex incrementi quadrati ex AB una cum duplo rectanguli AEB relate ad idem AB quadratum, auctum duplo rectanguli ACB.

Quoniam autem AB quadratum eſt æquale duobus quadratis AE, BE; erit AB quadratum una cum duplo rectanguli AEB æquale quadrato, quod fit ex ſumma ipſarum AE, BE. Et ſimiliter, quia AB quadratum eſt æquale duobus quadratis AC, BC; erit AB quadratum una cum duplo rectanguli ACB æquale quadrato, quod fit ex ipſis AC, BC ſimul ſumptis. Id

Id vero quum ita ſit, neceſſe eſt, ut eadem illa lege augeatur quoque quadratum, quod fit ex ſumma ipſarum AE, BE, relate ad quadratum, quod fit ex ipſis AC, BC ſimul ſumptis: & propterea eadem erit pariter lex, qua ſumma ex conjugatis diametris AE, BE augetur relate ad ſummam axium AC, BC.

XI. *Quod in omni ellipſi dentur duæ diametri conjugatæ, quæ inter ſe ſunt æquales.*

XI. Neque vero difficile erit oſtendere, *dari in qualibet ellipſi binas diametros conjugatas æquales inter ſe, ad quas quo magis accedunt binæ aliæ conjugatæ, eo minus a ſe mutuo differant.*

Ellipſis namque AKBL ſit AB axis ma-
Fig. 48. jor, & KL axis minor. Jungantur ſubtenſæ AK, AL; Et, biſectis iis in punctis O, & V, agantur per puncta iſta diametri EF, PR. Dico primo, diametros iſtas æquales eſſe inter ſe.

Quoniam enim axis major AB ſecat ordinatas ſuas, non modo bifariam, verum etiam ad angulos rectos; idem axis adeo quidem dividet ellipſim in duas partes AKB, ALB, ut una alteri ſuperimpoſita, congruent omnino. Sed in hac ſuperimpoſitione congruunt etiam, tum ſubtenſæ AK, AL, cum diametri EF, PR. Itaque binæ iſtæ diametri EF, PR æquales erunt inter ſe.

Dico ſecundo, earundem diametrorum EF, PR alteram alterius conjugatam eſſe. Jungatur enim ſubtenſa alia BL. Et, ob axes AB, KL biſectos in centro C, duæ AK, BL parallelæ erunt inter ſe. Sed, quum ſit, ut AV ad VL, ita AC ad CB; eadem BL parallela eſt quoque ipſi PR. Quare & PR ipſi AK paral-

lela

lela erit ; & conſequenter PR conjugata erit ipſius EF .

Dico denique , quod ſi DH , QS fuerint binæ aliæ ellipſis conjugatæ diametri ; eæ tanto minus a ſe mutuo differant , quo magis accedunt ad ipſas EF, PR . Nam , ex ſuperius oſtenſis , ſi una DH minuatur in acceſſu ad EF , altera QS augebitur accedendo ad PR. Et per contrarium ſi illa augeatur , hanc minui oportebit.

XII. Nolim autem hoc loco reticere,quod etſi rectangulum ex binis ellipſeos diametris conjugatis eo majus evadat , quo magis ipſæ diametri ad æqualitatem accedunt , & maximum fiat , ubi omnino inter ſe ſunt æquales; attamen *parallelogrammum, circa binas ellipſis conjugatas diametros deſcriptum, ſit ejuſdem ubique magnitudinis , hoc eſt æquale ſemper rectangulo , quod ſub ipſis axibus continetur.*

XII. *Parallelogrammum, circa duas ellipſis conjugatas diametros deſcriptum, eſt æquale rectangulo ſub axibus.*

FIG. 50.

Ellipſis enim AKBL ſit AB axis major, & KL axis minor . Sint autem EF , PR binæ ejus conjugatæ diametri . Ducantur per puncta E, & F rectæ QS , TV, ipſi PR parallelæ; tum item per puncta P , & R rectæ QV , TS, æquidiſtantes ipſi EF : ita , ut circa diametros conjugatas EF , PR deſcriptum ſit parallelogrammum QSTV . Dico , parallelogrammum iſtud æquale eſſe rectangulo, quod ſub axibus AB, KL continetur.

Demittatur , tum ad axem AB ordinata EG, cum ad diametrum EF ordinata AO . Et, ex ſuperius oſtenſis , erit , ut EG ad AO , ita KL ad PR; ſive etiam , ita CK ad CP . Sed, demiſſis ſuper CE,CP perpendicularis AI,EH,

EG eſt ad AO in ratione compoſita ex EG ad AI, & ex AI ad AO; hoc eſt in ratione compoſita ex CE ad CA, & ex EH ad CE. Quare etiam CK ad CP rationem habebit compoſitam ex EH ad CE, & ex CE ad CA.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EH ad CA. Quare erit ex æquali, ut CK ad CP, ita EH ad CA; & propterea rectangulum ex CP in EH, hoc eſt parallelogrammum PCEQ, erit æquale rectangulo, quod fit ex CA in CK. Sed parallelogrammum QSTV eſt quadruplum parallelogrammi PCEQ, & rectangulum ſub axibus AB, KL eſt quadruplum rectanguli ACK. Quare etiam parallelogrammum QSTV æquale erit rectangulo ſub axibus AB, KL.

XIII. *Theoremata de angulis, quos conjugatæ diametri in ellipſis centro conſtituunt.* FIG. 50.

XIII. Hinc vero plura deducuntur *circa angulos, quos ellipſeos conjugatæ diametri occurſu mutuo in centro conſtituunt.*

Nimirum primo, quod *ſinus anguli, ſub duabus quibuslibet conjugatis diametris contenti, ſit ad radium, ut eſt rectangulum ſub axibus ad id, quod ſub ipſis diametris continetur.*

Poſitis enim omnibus, ut ſupra, ſinus anguli ECP eſt ad radium, ut EH ad CE; ſive etiam, ut rectangulum ex CP in EH ad rectangulum ex CP in CE. Sed rectangulum ex CP in EH oſtenſum eſt æquale rectangulo ACK: quod quidem eſt ad rectangulum ex CP in CE, ut rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR. Quare erit ex æquali, ut ſinus anguli ECP ad radium, ita rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR.

Se-

Secundo, quod *ſinus angulorum, quos conjugatæ diametri occurſu mutuo in centro conſtituunt, ſint reciproce, ut rectangula, quæ fiunt ex ipſis diametris conjugatis.*

Jam enim oſtenſum eſt, quod ſinus anguli, quem duæ quævis conjugatæ diametri continent, ſit ad radium, ut eſt rectangulum ſub axibus ad id, quod ſub ipſis diametris continetur. Quare, ex æquo perturbando, ſinus anguli duarum conjugatarum erit ad ſinum anguli, quem aliæ duæ conjugatæ comprehendunt, ut eſt rectangulum iſtarum ad id, quod ex iis efficitur.

Denique, quod *angulus acutus, ſub binis ellipſeos diametris conjugatis comprehenſus, eo minor evadat, quo magis ipſæ diametri ad æqualitatem accedunt; & minimus fiat, ubi omnino inter ſe ſunt æquales.*

Nam, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum, quod binæ ellipſeos conjugatæ diamerri continent, eo majus evadit, quo magis eæ diametri ad æqualitatem convergunt. Sed ei rectangulo eſt reciproce proportionalis ſinus anguli, ſub iiſdem diametris contenti. Quare per contrarium, tam ſinus, quam ipſe angulus acutus, ad quem ſinus refertur, neceſſe eſt, ut eo minor fiat, quo magis conjugatæ diametri ad æqualitatem accedunt.

C A P. II.

Parametri diametrorum ellipſis inter ſe mutuo conferuntur.

I. *Duæ ellipſis diametri conjugatæ ſunt continuè proportionales cum ſuis parametris, ubi inverſo ordine inter eas collocantur.*

Fig. 51.

I. Comparatis inter ſe mutuo diametris ellipſis, ſequitur, ut parametros ipſarum ad invicem conferamus. Et primo quidem, *quum conjugatæ fuerint eæ diametri, quarum parametros ſimul conferre oportet, facile erit, de iis parametris dijudicare.*

In parametris enim, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur, iſtud obtinet theorema, quod *ipſæ diametri continuam cum eis proportionem conſtituant, ubi inverſo ordine inter illas collocantur.*

Ellipſis namque AKBL ſint AB, KL binæ ejus diametri conjugatæ. Sit autem AD parameter unius AB, & KI parameter alterius KL. Dico, diametros AB, KL, inverſo ordine poſitas inter ſuas parametros AD, KI, continuam cum eis proportionem conſtituere.

Quoniam enim KL eſt conjugata ipſius AB; erit, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Et ſimiliter, quoniam AB eſt conjugata ipſius KL; erit ut KL ad AB, ita AB ad KI. Quare quatuor AD, KL, AB, KI continue proportionales erunt.

II. *Comparatio parametrorum, quæ*

II. Hinc autem *plura deducuntur circa parametros, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Ni-

Nimirum primo, quod ſi duæ conjugatæ diametri AB, KL inter ſe ſint æquales; etiam parametri AD, KI debeant eſſe æquales, tam inter ſe, quam cum diametris ſuis.

ad duas ellipſis diametros conjugatas referuntur.

FIG. 51.

Secundo, quod ſi viciſſim duæ conjugatæ diametri AB, KL ſint inæquales; parametri quoque AD, KI debeant eſſe inæquales, tam inter ſe, quam cum qualibet earum diametrorum.

Tertio, quod ex diametris AB, KL ea, quæ major eſt, habeat parametrum, tum ipſa, cum diametro altera minorem; illa vero, quæ minor eſt, parametrum habeat, etiam altera diametro majorem.

Quarto, quod quum inæquales ſunt diametri AB, KL, & inæquales adeo ipſarum parametri AD, KI, ſumma parametrorum major ſit ſemper ſumma diametrorum.

Et denique, quod ſi capiatur differentia, tam inter diametrum AB, & parametrum ſuam AD, quam inter diametrum KL, & ſuam parametrum KI; ea quidem differentia ſit major, quæ ad minorem diametrum, majoremque adeo parametrum refertur.

III. Ubi autem diametri non fuerint conjugatæ, poterit de parametris ipſarum judicium ferri, oſtenſo prius hoc theoremate, quod *ſi quadrato alicujus diametri figura ejus adjiciatur, ſumma, quæ inde oritur, eadem ubique erit*.

III. *In ellipſi quadratum diametri una cum ejus figura eandem ubique ſummam conſtituit.*

FIG. 51.

Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, quod ſi ad quadratum diametri AB apponatur figura ejus, quæ conſtituitur per rectangulum DAB; ſumma, inde confecta, ſit ſemper

eadem, quocumque in loco capiatur diameter AB.

Ex ſuperius ſiquidem oſtenſis, eadem ubique ſumma conficitur, ſi ad quadratum diametri AB adjiciatur quadratum, quod fit ex ejus conjugata KL. Sed quadratum ex KL eſt æquale rectangulo DAB. Quare, ſi eidem AB quadrato apponatur rectangulum DAB, ſumma inde orta pariter eadem ubique erit.

IV. *Duæ ellipſis diametri, ſunt reciproce proportionales ſummis laterum ſuarum figurarum.*

IV. Inde vero inferre licet, *duas quaſvis diametros ellipſis reciproce proportionales eſſe ſummis laterum ſuarum figurarum.*

Ut enim diametri AB parameter eſt AD, ita ſit EH parameter cujuſvis alterius diametri EF. Dico, AB eſſe ad EF, ut eſt ſumma
Fig. 51. ipſarum EF, EH ad ſummam ex ipſis AB, AD.

Ob oſtenſum namque theorema, eadem ſumma oritur, tam ſi ad AB quadratum adjiciatur rectangulum DAB, quam ſi ad EF quadratum apponatur rectangulum HEF. Itaque AB quadratum una cum rectangulo DAB æquale erit EF quadrato una cum rectangulo HEF.

Jam AB quadratum una cum rectangulo DAB tantundem valet, ac rectangulum ex AB in ſummam ipſarum AB, AD. Et ſimiliter EF quadratum una cum rectangulo HEF perinde eſt, ac rectangulum ex EF in ſummam ex ipſis EF, EH. Quare, quum æqualia ſint inter ſe duo iſta rectangula; erit, ut AB ad EF, ita ſumma duarum EF, EH ad ſummam duarum AB, AD.

V. Atque hinc modo facile erit oſtendere,

æ, quod *ex binis ellipſeos diametris ea, quæ major eſt, minorem parametrum habeat.*

V.
Ex duabus diametris ellipſis ea, quæ minor eſt, majorem parametrum habet.
FIG. 51.

Maneant enim omnia, ut ſupra. Et ponamus, diametrum AB majorem eſſe diametro EF. Dico, parametrum AD, quæ refertur ad diametrum majorem, eſſe viciſſim minorem parametro EH, quæ refertur ad diametrum minorem.

Oſtenſum eſt namque, quod diameter AB ſit ad diametrum EF, ut eſt ſumma ipſarum EF, EH ad ſummam ex ipſis AB, AD. Quare, ſicuti AB major eſt, quam EF; ita & duæ EF, EH majores erunt duabus AB, AD.

Parameter igitur EH, adſciſcens ſuam diametrum EF, majorem ſummam conſtituit, quam parameter AD, aſſumens diametrum ſuam AB. Sed EF minor eſt, quam AB. Itaque EH multo major erit, quam AD.

VI.
Comparatio parametrorum, quæ ad ellipſis diametros omnes referuntur.
FIG. 51

VI. Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, quod ſicuti omnium diametrorum ellipſis maxima eſt axis major, minima vero axis minor; ſic viciſſim *omnium parametrorum minima quidem ſit illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem.*

Liquet etiam, quod ſicuti diameter in receſſu ab axe majore, & in acceſſu ad minorem continuo minuitur, maximamque patitur diminutionem, quum ad ipſum axem minorem pervenit; ſic viciſſim *ejus parameter continuo augeatur, maximumque incrementum ſubeat in ipſo axe minore.*

Quia autem oſtenſum eſt, parametrum ejus diametri, quæ conjugatam habet æqualem, adæquare diametrum ſuam; liquet de-

mum, *parametrum minorem eſſe diametro, ad quam refertur, ab axe majore uſque ad eum locum, in quo æqualitatis diameter reperitur; eſſe vero majorem, ab eo loco uſque ad axem minorem.*

VII. *Locus, ad quem terminantur parametri omnium diametrorum ellipſis, definitur.*

VII. Sed nolim hic reticere, quod ſicuti locus omnium diametrorum ellipſis exhiberi poteſt per dati cujuſdam circuli portionem; ſic *locus omnium parametrorum ſit portio rectæ lineæ, quæ circuli ejus circumferentiam in dato quodam puncto contingit.*

FIG. 49. Si enim rectæ AC, BC referant axes ellipſis, hoc eſt AC axem majorem, & BC axem minorem; junctiſque iis ad angulos rectos, deſcribatur ſuper AB ſemicirculus ACB, & ducatur per punctum C recta CD, ipſi AB parallela; erit, ex ſuperius oſtenſis, portio CED locus omnium diametrorum ellipſis.

Jam, ſi ex puncto B erigamus ſuper AB perpendicularem BH, cum qua conveniat, tum axis major AC in puncto H, cum axis minor AD in puncto I: quemadmodum recta iſta BH continget circumferentiam in puncto B; ita portio hujus tangentis HI erit nobis veluti locus omnium parametrorum ellipſis.

Eſt enim portio circumferentiæ CED locus omnium diametrorum ellipſis; quia quælibet ellipſis diameter exhiberi poteſt per rectam, quæ ducitur ex puncto A ad eam portionem. Et, ob eandem rationem, erit portio tangentis HI locus omnium parametrorum; quia, ſi AE fuerit diameter quævis, eademque extendatur, uſque donec tangenti occurrat in K, erit EK parameter ipſius AE.

VIII. Ne-

VIII. Neque vero difficile erit, *rei hujus veritatem oſtendere*, tam relate ad ipſos axes AC,AD, quam reſpectu cujuſvis alterius diametri AE, ſi ejus recordemur, quod ſupra demonſtravimus, nimirum conjugatam diametri AE eſſe rectam alteram BE, ductam ad idem punctum E ex termino altero B. VIII. *Demonſtratio determinationis præcedentis.* FIG.49.

Eſt namque triangulum ABH rectangulum in B. Quare, quum ex angulo recto demiſſa ſit ſuper hypothenuſam AH perpendicularis BC; erit, ut AC ad BC, ita BC ad CH. Sed parameter axis majoris eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem majorem, & axem alterum minorem. Itaque erit CH parameter axis majoris AC.

Eadem ratione, quoniam triangulum ABI rectum habet angulum in B, & ex angulo recto demiſſa eſt ſuper hypothenuſam AI perpendicularis BD; erit ut AD ad BD, ita BD ad DI. Sed parameter axis minoris eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem minorem, & axem alterum majorem. Itaque erit DI parameter axis minoris AD.

Denique, quia triangulum ABK eſt rectangulum in B, & ex angulo recto demiſſa eſt ſuper hypothenuſam AK perpendicularis BE; erit ut AE ad BE, ita BE ad EK. Sed parameter diametri AE eſt tertia proportionalis poſt ipſam diametrum AE, & ejus conjugatam. Itaque quum ſit BE conjugata diametri AE, erit EK parameter ejuſdem diametri AE.

IX. Id quum ita ſit, *jam veritas eorum omnium, quæ paulo ante a nobis oſtenſa ſunt circa parametros diametrorum ellipſis, rurſus apparebit.* IX. *Veritas eorum, quæ in comparatio-*

Pro-

ne parametrorum ellipſis locum habent, rurſus demonſtratur.

FIG. 49.

Protractis ſiquidem ad tangentem uſque BH rectis omnibus, quæ ducuntur ex puncto A ad circumferentiam CED; perſpicuum eſt, ex portionibus ipſarum, quæ tangente, & circulo intercipiuntur, minimam quidem eſſe CH, maximam vero DI. Itaque parametrorum omnium ellipſis minima quidem erit illa, quæ refertur ad axem majorem AC; maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem AD.

Deinde perſpicuum eſt quoque, eaſdem illas portiones eo magis augeri, quo magis a puncto B removentur, atque adeo, quo minores ſunt rectæ, cum quibus jacent in directum. Quare ſimiliter parametri ellipſis tanto quidem majores erunt, quanto minores ſunt diametri, ad quas eæ referuntur.

Ad hæc, ſi duæ AE, BE fuerint inter ſe mutuo æquales, utrique ipſarum erit æqualis quoque EK; quum ſit, ut AE ad BE, ita BE ad EK. Unde rurſus liquet, parametrum ejus diametri, quæ conjugatam habet æqualem, longitudine ſua, tum ipſam diametrum, ad quam refertur, cum conjugatam ejus adæquare.

Denique, quum tres AE, BE, EK ſint continue proportionales, erit EK minor, quam AE, quotieſcumque AE ſuperat BE; erit vero major, quum viciſſim BE ſuperat AE. Unde rurſus apparet, ab axe majore uſque ad diametrum, quæ conjugatam habet æqualem, eſſe parametros minores ſuis diametris; eſſe vero majores, ab ea diametro uſque ad axem minorem.

X. Exinde etiam colligi denuo poteſt veritas

ritas theorematis, ſuperius oſtenſi, quod *duæ quavis ellipſeos diametri ſint reciproce proportionales ſummis laterum ſuarum figurarum.*

X. *Rurſus oſtenditur, quod diametri ellipſis reciproce correſpondeant ſummis laterum ſuarum figurarum.* FIG. 49.

Si enim AE referat ellipſis diametrum aliquam; protracta ea uſque ad tangentem BH, fiet EK parameter ejus. Unde erit AK ſumma laterum ſuæ figuræ. Sed AK eſt ad AB, ut AB ad AE. Quare rectangulum, quod fit ex diametro AE in ſummam laterum ſuæ figuræ, æquale erit quadrato ipſius AB.

Simili ratione oſtendemus, eidem AB quadrato æquale eſſe rectangulum, quod fit ex quavis alia diametro in ſummam laterum figuræ ſuæ. Quare æqualia erunt inter ſe rectangula, quæ fiunt ex duabus quibuſvis diametris in ſummas laterum ſuarum figurarum: & propterea ſummis iſtis reciproce proportionales erunt ipſæ diametri.

XI. *Theoremata de ſumma, & differentia laterum figuræ diametri.* FIG. 49.

XI. Quamquam autem vi hujus theorematis, ſumma laterum figuræ diametri eo ſit minor, quo magis ipſa diameter ad majorem axem accedit; *differentia tamen eorundem laterum eo minor evadit, quo magis diameter accedit ad eam, quæ tum parametrum, cum conjugatam habet æqualem.*

Sit enim AE diameter illa, cui æqualis eſt, tam parameter EK, quam conjugata BE. Jamque, ex ſuperius oſtenſis, parametri minores erunt ſuis diametris ab axe majore uſque ad AE; erunt vero per contrarium majores ab AE uſque ad axem minorem.

Quia autem in acceſſu ab axe majore ad ipſam AE, parametri quidem augentur, diametri vero minuuntur; omnino neceſſe eſt, ut

in

in acceſſu iſto decreſcat differentia laterum figuræ. Sed decreſcet quoque in acceſſu ab axe minore ad eandem AE; quia hic per contrarium diametri quidem augentur, parametri vero diminutionem patiuntur.

Ob æquales porro AE, EK, liquet, differentiam laterum figuræ diametri, tam in acceſſu ab axe majore ad ipſam AE, quam in acceſſu ab axe minore ad eandem AE, decreſcere eo uſque, ut tandem evaneſcat. Et quamquam eadem differentia maximum ſubeat incrementum ſub ipſis axibus; per ea tamen, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, major eſt ſub axe minore, quam ſub axe majore.

XII. *Theoremata de ſumma, & differentia quadratorum, quæ fiunt ex iiſdem figuræ lateribus:*

XII. Quod oſtenſum eſt de differentia laterum figuræ, verum eſt quoque *de differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*; idque eadem omnino ratione demonſtratur. Quantum vero *ad ſummam eorundem quadratorum* duo ſunt caſus diſtinguendi.

Primus caſus eſt, quum quadratum ex axe majore non majus eſt dimidio quadrati, quod fit ex ſumma laterum ſuæ figuræ. Et quum id contingit, quadrata ex lateribus figuræ diametri, ſimul ſumpta, eo minorem ſummam conficient, quo ipſa diameter magis accedit ad axem majorem.

Alter caſus eſt, quum per contrarium eſt majus. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum æquale ſit quadrato, quod fit ex ſumma laterum ſuæ figuræ; eo minorem conſtituent ſummam quadrata ex lateribus figuræ alterius diametri, quo magis altera iſta diameter ad priorem illam accedit.

XIII. Pen-

XIII. Pendet autem utriuſque demonſtratio *ex pulcherrima iſta circuli proprietate*, quod ſi ex extremitate diametri A ducatur ad tangentem AH recta AM talis longitudinis, ut AN quadratum æquale ſit dimidio quadrati ipſius AM, ſumma quadratorum AE, EK eo quidem ſit minor, quo magis AK accedit ad AM.

XIII. *Demonſtratio theorematum de ſumma, ex eleganti circuli proprietate deducta.*

Ponamus etenim primo, quod AC quadratum non ſit majus dimidio quadrati, quod ſit ex AH. Et quia AC eſt ad AH, ut AF ad AB; nec etiam AF quadratum majus erit dimidio quadrati, quod ſit ex AB. Quare, ſi fiat AO quadratum æquale dimidio quadrati ipſius AB, non erit AO minor, quam AF; ſed vel æqualis, vel major. Fig. 52.

Erigatur itaque ex puncto O perpendicularis ON, circumferentiæ occurrens in puncto N, per quod agatur recta AM. Et quia AO eſt ad AB, ut AN ad AM; etiam AN quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod ſit ex AM. Quare, per eam circuli proprietatem, ſumma quadratorum AE, EK eo minor erit, quo magis AK accedit ad AM, & conſequenter ad AH.

Ponamus ſecundo, quod AC quadratum majus ſit dimidio quadrati, quod ſit ex AH. Et quia etiam AF quadratum majus erit dimidio quadrati, quod ſit ex AB; ſi fiat, ut huic dimidio æquale ſit AO quadratum, erit AO minor, quam AF. Unde, erecta perpendiculari ON, dabitur diameter AN, cujus quadratum adæquat dimidium quadrati, quod ſit ex ſumma laterum ſuæ figuræ: & propterea, per Fig. 53.

ean-

eandem circuli proprietatem, ſumma quadratorum ex lateribus figuræ cujuſvis alterius diametri AE eo minor erit, quo magis altera iſta diameter accedit ad AE.

XIV. *Demonſtratio ejus proprietatis quæ circulo competit.*

FIG. 52.

XIV. Si autem conſideremus, angulum quemvis rectilineum, ubi vertitur circa verticem ſuum, eo minorem ex recta poſitione data cruribus ſuis portionem abſcindere, quo magis accedit ad eam poſitionem, in qua crura ejus æqualia fiunt; haud difficulter *præfatæ proprietatis, quæ circulo competit, veritatem demonſtrabimus.*

Si enim ſit G centrum circuli; erunt quadrata duo AF, BF dupla quadratorum, quæ fiunt ex AG, GF; & conſequenter dupla quoque quadrati, quod fit ex EF. Unde, quemadmodum ſumma quadratorum AC, CH eſt ad ſummam quadratorum AF, BF, ut AC quadratum ad AF quadratum, ſive etiam, ut AB ad AF; ita eadem ſumma quadratorum AC, CH erit ad duplum quadrati, quod fit ex EF, ſimiliter ut AB ad AF.

Jam, ſi fiat angulus FES æqualis angulo EAF; erit, ut AF ad EF, ita EF ad FS: proindeque, quum EF quadratum ſit æquale rectangulo AFS; erit adhuc, ut ſumma quadratorum AC, CH ad duplum rectanguli AFS, ita AB ad AF: & propterea, quia AB eſt ad AF, ut rectangulum ex AB in FS ad rectangulum AFS; erit ſumma quadratorum AC, CH æqualis duplo rectanguli, quod fit ex AB in ipſam FS.

Simili autem ratione oſtendemus, quod ſi fiat angulus OER, æqualis eidem angulo EAF,

EAF, ſumma quadratorum AN, NM ſit æqualis duplo rectanguli, quod ſit ex AB in OR. Unde erit, ut ſumma quadratorum AC, CH ad ſummam quadratorum AN, NM, ita FS ad OR: proindeque, quia duo anguli FES, OER, qui cruribus ſuis abſcindunt ex AB portiones FS, OR, ſunt æquales inter ſe; jam incidimus in eum caſum, in quo angulus rectilineus vertitur circa verticem ſuum, & ex recta poſitione data cruribus ſuis portionem abſcindit.

Id quum ita ſit, eo res redit, ut oſtendamus, angulum iſtum, quum abſcindit portionem OR, talem poſitionem habere, ut æqualia ſint crura ejus EO, ER. Id vero liquet abunde. Nam, quemadmodum AN quadratum adæquat dimidium quadrati, quod ſit ex AM, ita AO quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod ſit ex AB. Sed AE quadratum, velut æquale quadratis AG, EG, dimidium iſtud ſimiliter adæquat. Quare duæ AE, AO æquales erunt inter ſe: & propterea, ob triangula æquiangula AEO, OER, erunt etiam æquales duæ EO, ER.

CAP. III.

Problemata quædam circa ellipſis diametros, & parametros reſolvuntur.

I. Circa diametros ellipſis, earundemque parametros plura poſſunt proble- I. *Datis axibus ellipſis*

Invenire duas diametros conjugatas, quarum data ſit ratio.

FIG. 49.

blemata inſtitui, elegantia quidem per ſe ipſa, tum etiam apprime utilia. Eo hoc capite curſim proſequi, haud equidem gravabimur; eoque magis, quod nullo negotio reſolvantur, poſtquam nobis innotuit, diametros omnes ellipſis in dati cujuſdam circuli portione reperiri; eaſdemque, ad datam uſque tangentem productas, parametros nobis exhibere.

Primum itaque problema hoc erit: *datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter ſe.* Referant ergo rectæ duæ AC, BC axes ellipſis, hoc eſt AC axem majorem, & BC axem minorem. Jamque, ſi junctis iis ad angulos rectos, deſcribatur ſuper AB ſemicirculus ACB, ducaturque recta CD, ipſi AB parallela; erit, ex ſuperius oſtenſis, portio circumferentiæ CED locus omnium diametrorum ellipſis.

Quia autem, ex ſuperius oſtenſis, axis major ad axem minorem habet majorem rationem, quam quævis alia diameter ad ſuam conjugatam; utique data ratio, tum directe, cum inverſe ſumpta, minor eſſe debet ea, quam habet AC ad BC. Itaque, ſi fiat primo, ut AC ſit ad CR in data illa ratione: erit CR major, quam BC. Et ſi fiat ſecundo, ut BC ſit ad AC, veluti eſt AC ad CS; erit CR minor, quam CS.

Hinc, junctis rectis AR, AS, erit angulus ARC minor quidem angulo ABC, major vero angulo ASC. Sed, ob triangula æquiangula ABC, ACS, angulus ASC æqualis eſt angulo BAC, ſive ABD. Quare idem angulus ARC, ut eſt minor angulo ABC, ſic major

erit

erit angulo ABD: & propterea, ſi fiat angulus ABE, æqualis angulo ARC; recta BE cadet inter duas BC, BD; adeoque terminabitur ad portionem circumferentiæ CED.

Inde vero conſequitur, rectas duas AE, BE eſſe diametros conjugatas ejus ellipſis, cujus axes ſunt rectæ AC, BC. Et quoniam, ob triangulá æquiangula AEB, ACR, ratio ipſarum AE, BE æqualis eſt ei, quam habet AC ad CR; liquet, eaſdem AE, BE eſſe etiam in data ratione. Unde diametri conjugatæ, quæ propoſito problemati ſatisfaciunt, eæ erunt, quas exhibent ipſæ AE, BE.

II. *Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.* FIG. 49.

II. Secundum problema ita ſe habet: *datis axibus ellipſis, invenire dũas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.* Referant adhuc rectæ duæ AC, BC axes ellipſis: adeo, ut iiſdem, ut ſupra, peractis, ſit portio circumferentiæ CED locus omnium diametrorum ellipſis. Et quoniam, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum ſub binis ellipſeos diametris conjugatis eo majus evadit, quo magis ipſæ diametri accedunt ad eas, quæ inter ſe ſunt æquales; utique datum rectangulum, nec minus eſſe debet eo, quod ſub axibus AC, BC continetur, nec majus illo, quod conjugatæ æquales comprehendunt.

Jam, demiſſa ſuper AB perpendiculari CF, rectangulum ſub axibus AC, BC æquale eſt ei, quod fit ex AB in CF; quandoquidem triangula ABC, BCF inter ſe ſunt æquiangula; adeoque AB eſt ad AC, ut BC ad CF. Et quoniam conjugatæ æquales ſub eo circumferentiæ puncto reperiuntur, quod bifariam di-

vidit portionem CED; rectangulum, ſub ipſis contentum, ob eandem rationem, erit æquale ei, quod ſit ex AB in circuli radium. Quare datum rectangulum, nec minus eſſe debet eo, quod ſit ex AB in CF, nec majus illo, quod ſit ex AB in ſui ipſius ſemiſſem.

Hinc, ſi datum rectangulum æquale ponatur ei, quod ſit ex AB in rectam XZ; erit recta iſta XZ major, quam CF, minor vero ſemiſſe ipſius AB. Quare, ſi ex puncto A erigatur ſuper AB perpendicularis AP, æqualis ipſi XZ, & per punctum P ducatur recta PE, eidem AB parallela; hæc ſecabit portionem CED in puncto aliquo E. Jungantur rectæ AE, BE. Et rectæ iſtæ exhibebunt nobis diametros quæſitas. Nam, propter triangula æquiangula ABE, AEP, erit ut AB ad BE, ita AE ad AP, ſive XZ: & propterea rectangulum ſub ipſis AE, BE æquale erit rectangulo, quod ſit ex AB in XZ.

III. *Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam ſummam conficiant.*

III. Tertium problema in hunc modum concipitur: *datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam ſummam conficiant*. Sed iſtud problema facili negotio ad præcedens reducitur. Ubi enim data eſt ſumma diametrorum, dabitur etiam quadratum, quod ſit ex ſumma illa. Sed quadratum iſtud eſt æquale quadratis diametrorum una cum rectangulo, bis ſub ipſis diametris contento. Quare, quod conſtituunt quadrata ex diametris una cum rectangulo, bis ſub eis comprehenſo, illud utique datum erit.

Et quoniam, per ſuperius oſtenſa, quadrata diametrorum ſimul ſumpta datam ſummam con-

conſtituunt, nimirum eandem illam, quam exhibent quadrata axium; conſtituet quoque datam ſummam duplum rectanguli, quod ſub ipſis diametris continetur. Quare datum erit rectangulum iſtud: & propterea propoſitum problema eo reducetur, ut datis axibus ellipſis, inveniantur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum contineant.

Quemadmodum autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant, oportet, ut rectangulum datum, nec ſit minus eo, quod continetur ſub axibus, nec majus illo, quod fit ex diametris conjugatis æqualibus; ita quoque, quum inveniendæ ſunt duæ conjugatæ diametri, quæ ſimul datam rectam adæquent: per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, neceſſe eſt, ut recta data, nec ſumma axium ſit minor, nec major ſumma conjugatarum æqualium.

IV. *Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia ſit data.*

IV. Quartum problema hujuſmodi erit: *datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia ſit data.* Sed hoc quoque problema facili negotio ad ſecundum revocabitur, ſi conſideremus, quod per ſeptimam ſecundi Elementorum quadratum ex differentia duarum conjugatarum diametrorum, una cum rectangulo, bis ſub ipſis contento, æquale eſſe debeat quadratis earundem; atque adeo quadratis axium.

Hinc enim fit, ut ſiquidem ex ſumma quadratorum, quæ fiunt ex axibus, auferatur quadratum datæ differentiæ; id, quod ſupereſt, ſit duplum rectanguli, quod quæſitæ dia-

metri continent. Unde, quum datum ſit reſiduum iſtud, dabitur etiam dimidium ejus, hoc eſt rectangulum, ſub quæſitis diametris contentum; & conſequenter eo res redit, ut inveniantur duæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

Cæterum, quum inveniendæ ſunt duæ diametri conjugatæ, quarum differentia ſit data; illud quidem requiritur, ut data iſta differentia non ſit major differentia axium. Nam, ex ſuperius oſtenſis, omnium diametrorum maxima quidem eſt axis major, minima vero axis minor. Quare omnino neceſſe eſt, ut differentia duarum conjugatarum diametrorum minor ſit differentia axium.

V.

Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata differant a ſe mutuo per differentiam datam.

V. Quintum problema ita proponetur: *datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata differant a ſe mutuo per datam differentiam*. Ejus autem reſolutio nullam difficultatem involvit. Quum enim eadem quadrata ſimul æqualia eſſe debeant quadratis axium; utique data erit, tam ſumma, quam differentia eorum quadratorum.

Hinc, ſiquidem ad dimidium ſummæ addatur dimidium differentiæ, habebitur quadratum diametri majoris. Quod ſi autem ex dimidio ſummæ auferatur dimidium differentiæ, orietur quadratum diametri minoris. Quare diametrorum quadrata data etiam erunt ſeorſim; & conſequenter dabuntur quoque ipſæ diametri, quas oportet invenire.

Sicuti autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quarum differentia ſit data, neceſſe eſt, ut data iſta differentia non ſit ma-

major differentia axium ; ita quoque , quum invenire oportet , binas conjugatas diametros, quarum quadrata differant a ſe mutuo per datam differentiam, illud quidem requiritur , ut iſtiuſmodi data differentia non ſit major quadrato, quod ſit ex differentia axium.

VI. Sextum problema hunc in modum efferemus: *datis axibus ellipſis , invenire duas diametros conjugatas , quæ datum angulum contineant*. Sed facile erit, problema iſtud ad ſecundum revocare, in quo datis axibus ellipſis , quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

VI. *Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas , quæ datum angulum contineant.*

Nam ſemper ac datus eſt angulus, quem quæſitæ diametri continent ; data erit ratio , quam habet ejus ſinus ad radium . Sed ratio iſta eſt æqualis ei , quam habet rectangulum ſub axibus ad id , quod ſub ipſis diametris continetur . Quare etiam hæc alia ratio data erit : & propterea , quum datum ſit rectangulum ſub axibus; dabitur quoque rectangulum , quod continent quæſitæ diametri.

Quemadmodum autem , quum quæruntur binæ diametri conjugatæ , quæ datum rectangulum comprehendant, neceſſe eſt, ut rectangulum datum non ſit majus eo, quod ſub conjugatis æqualibus continetur ; ita , quum inveniendæ ſunt duæ diametri conjugatæ , quæ datum angulum contineant, oportet, ut ratio ſinus anguli dati ad radium non ſit minor ea , quam habet rectangulum ſub axibus ad id , quod conjugatæ æquales comprehendunt.

VII. In ſeptimo problemate illud porro quæ-

VII. *Datis axibus ellipſis, invenire diametrum, quæ datam parametrum habeat.*

FIG. 49.

quæremus, *qua ratione datis axibus ellipſis, invenire liceat diametrum, quæ datam parametrum habeat*. Solvemus autem problema iſtud in hunc modum. Manentibus omnibus, ut ſupra, erigatur ſuper AB perpendicularis BQ; quæ dimidium datæ parametri adæquet. Tum juncta AQ, deſcribatur centro Q, intervalloque QB circuli circumferentia, cum qua ipſa AQ conveniat in punctis T, & V. Denique in angulo ABH applicetur recta AK, æqualis ipſi AV. Et erit AE diameter quæſita.

Jam enim eidem AB quadrato æquale eſt, tam rectangulum EAK, quam rectangulum TAV. Quare duo rectangula EAK, TAV æqualia erunt inter ſe: & propterea erit, ut AK ad AV, ita AT ad AE. Sed ex conſtructione duæ AK, AV ſunt æquales inter ſe. Quare erunt pariter æquales duæ AE, AT; atque adeo etiam EK ipſi TV æqualis erit. Sed TV, velut dupla ipſius BQ, datam parametrum adæquat. Et igitur eidem parametro æqualis quoque erit ipſa EK; adeoque erit AE diameter, quam quærimus.

Conſtat autem, ex ſuperius oſtenſis, parametrorum omnium ellipſis minimam quidem eſſe illam, quæ refertur ad axem majorem AC, maximam vero eam, quæ pertinet ad axem minorem AD. Quare, ut propoſitum problema reſolvi poſſit, omnino neceſſe eſt, ut data parameter, nec minor ſit parametro axis majoris, nec major parametro axis minoris.

VIII. *Datis axibus ellipſis, invenire*

VIII. Ad octavum problema quod attinet, quæremus in eo, *qua ratione datis axibus ellipſis, inveniri poſſit diameter, quæ ad para-*

me-

metrum ſuam datam habeat rationem. Ejus vero ſolutionem facili negotio obtinebimus, ſi iiſdem, ut ſupra, manentibus, ſecetur AB ſubinde quidem in G, ut AG ad BG ſit in data illa ratione. Nam, erecta deinde perpendiculari GE ad circumferentiam uſque, fiet AE diameter quæſita; quum ſit, ut AE ad EK, ita AG ad BG.

Diametrum quæ ad parametrum ſuam datam habeat rationem.

Fig. 49.

Ex eo autem, quod diametrorum omnium ellipſis maxima quidem ſit axis major, minima vero axis minor; parametrorum autem minima ſit illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero ea, quæ pertinet ad axem minorem; liquet, rationem cujuſvis diametri ad ſuam parametrum, ea quidem, quam habet axis major ad parametrum ſuam, minorem eſſe; illa vero, quam habet axis minor ad ſuam parametrum majorem eſſe debere. Unde, niſi ratio data his terminis contineatur, problema erit ſolutu impoſſibile.

Idem problema poteſt etiam ad primum revocari. Nam, ſemper ac data eſt ratio, quam quæſita diameter habere debet ad ſuam parametrum; utique data erit pariter ratio, quam eadem quæſita diameter habebit ad ſuam conjugatam: quippe quæ illius eſt duplicata. Unde viciſſim primum problema ad octavum iſtud poterit reduci: quærendo nempe diametrum, quæ ad ſuam parametrum habeat rationem ſubduplicatam ejus, quæ inter utramque diametrum eſſe debet.

IX. Nonum problema eo ſe vertet, ut *datis axibus ellipſis, inveniatur diameter, quæ, vel conſtituat datam ſummam cum ſua pa-*

IX. *Datis axibus ellipſis, invenire*

diametrum, quæ vel conſtituat datam ſummam cum ſua parametro, vel differat ab ea per datam differentiam.

Fig. 53. 54.

rametro, vel differat ab ea per datam differentiam. Et quantum ad priorem partem facili negotio reſolvetur; quum ſatis ſit in angulo ABH applicare rectam AK, quæ datam illam ſummam adæquet. Quantum vero ad partem alteram duo ſunt caſus diſtinguendi. Nam diameter quæſita, vel major eſſe debet ſua parametro per datam illam differentiam, vel per contrarium minor.

In utroque autem caſu reſolvetur problema in hunc modum. Extendatur tangens BH ad partem alteram verſus M: ita, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum juncta AM, erigatur ſuper ea perpendicularis MN, æqualis dimidio datæ differentiæ. Deſcribatur deinde centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, cum qua conveniat recta AN in punctis O, & R. Jamque, ſi in angulo ABH applicetur recta AK, æqualis ipſi AO in primo caſu, & ipſi AR in ſecundo; fiet AE diameter quæſita.

Quum enim AM quadratum duplum ſit quadrati ex AB, ſitque etiam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, & rectangulum EAK æquale quadrato ex AB; erit rectangulum OAR duplum pariter rectanguli EAK. Unde, ſecta AO bifariam in puncto S, erit, tam rectangulum ex AO in SN, quam rectangulum ex AS in AR æquale rectangulo EAK: & propterea erit, non modo, ut AO ad AK, ita AE ad SN; verum etiam, ut AR ad AK, ita AE ad AS.

Fig. 53. Hinc, quum inprimo caſu duæ AK, AO ſint æquales inter ſe, erunt etiam æquales duæ

AE,

AE, SN: proindeque, ſi fiat AT, æqualis ipſi ON: adeo nempe, ut ſit TN æqualis ipſi AO, ſeu AK; erit reliqua TS æqualis reliquæ EK. Sed, ob æquales NR, AT, duæ NR, TS ſunt æquales ipſi AS, vel SO; atque adeo, appoſita communi ON, etiam duæ OR, TS adæquant totam SN. Quare, ſicuti SN ſuperat TS per rectam OR, quæ, velut dupla ipſius MN, adæquat datam differentiam; ita quoque diameter AE ſuperabit parametrum ſuam EK per differentiam datam.

In ſecundo vero caſu, quum ſint æquales duæ AK, AR; erunt etiam æquales duæ AE, AS: proindeque reliqua EK reliquæ SR pariter æqualis erit. Sed SR ſuperat AS, vel SO per rectam OR, quæ, velut dupla ipſius MN, eſt æqualis datæ differentiæ. Quare etiam parameter EK ſuperabit diametrum AE, ad quam ipſa refertur, per differentiam datam. FIG. 54.

Cæterum per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſicuti data ſumma, quam conſtituere debet diameter cum ſua parametro, minor ſit oportet ſumma ex lateribus figuræ axis minoris, major vero ſumma ex lateribus figuræ axis majoris; ita etiam data illa differentia, per quam diameter a ſua parametro differre debet, in primo caſu neceſſe eſt, ut ſit minor differentia laterum figuræ axis minoris, in ſecundo vero caſu minor differentia laterum figuræ axis majoris.

X. Decimum problema illud oſtendet, *qua ratione, datis axibus ellipſis, invenire liceat diametrum, cujus parameter cum ſumma ex lateribus figuræ datum rectangulum contineat.*

X. Datis axibus ellipſis, invenire diametrum, cujus para-

Ejus

meter cum ſumma ex lateribus figuræ datum rectangulum contineat.

Ejus vero ſolutionem protinus obtinebimus, ſi utique ex tangente BH abſcindamus portionem BK, cujus quadratum datum illud rectangulum adæquet. Nam, juncta AK, fiet

FIG. 49. AE diameter quæſita.

Quum enim diametri AE parameter quidem ſit EK, ſumma vero ex lateribus figuræ ſit AK; erit AKE rectangulum, quod ſit ex parametro ejus in ſummam laterum ſuæ figuræ. Sed rectangulum AKE eſt æquale quadrato ipſius BK. Unde, ſicuti BK quadratum, ex conſtructione, datum rectangulum adæquat; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum AKE.

Patet autem, quod, ut problema iſtud reſolvi poſſit, omnino neceſſe ſit, ut datum rectangulum ſit majus eo, quod ſit ex parametro axis majoris in ſummam laterum ſuæ figuræ, & minus illo, quod parameter axis minoris continet cum ſumma laterum ſuæ figuræ. Nam vidimus ſuperius, tam parametrum, quam ſummam laterum figuræ eo magis augeri, quo magis diameter ad axem minorem accedit.

Hoc idem problema poterat etiam ad præcedens revocari. Quum enim datum ſit rectangulum, quod ſit ex parametro in ſummam laterum figuræ; ſi ei addamus rectangulum aliud, ſimiliter datum, quod ſit ex diametro in eandem illam ſummam, dabitur quoque quadratum ex figuræ lateribus ſimul ſumptis; & conſequenter ipſa laterum ſumma etiam data erit. Unde eo res redit, ut quæramus diametrum, quæ cum ſua parametro da-

tam

tam ſummam conſtituat.

XI. In undecimo problemate oſtendemus, *quo pacto, datis axibus ellipſis, inveniri poſſit diameter, cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam*. Atque hic duo ſunt caſus diſtinguendi. Primus eſt, quum quadratum diametri majus eſſe debet quadrato parametri. Alter, quum viciſſim debet eſſe minus. In primo caſu data differentia minor ſit oportet differentia quadratorum, quæ fiunt ex lateribus figuræ axis majoris. In ſecundo vero caſu debet eſſe minor differentia quadratorum ex lateribus figuræ axis minoris.

XI. *Datis axibus ellipſis, invenire diametrum, cujus quadratum differat à quadrato parametri per datam differentiam.*

Quantum ad priorem caſum ſolvetur problema in hunc modum. Extendatur tangens BH ad partem alteram verſus M: ita, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum juncta AM, deſcribatur ſuper ea, velut diametro, ſemicirculus ANM, in quo applicetur recta MN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, ſi in angulo ABH applicemus rectam AK, æqualem ipſi AN; erit AE diameter quæſita. FIG. 55.

Quum enim AK ſit æqualis ipſi AN, erunt quadrata duo AK, MN æqualia quadrato ex AM. Sed quadratum ex AM, velut duplum quadrati, quod ſit ex AB, eſt æquale duplo rectanguli EAK. Quare quadrata duo AK, MN duplo rectanguli EAK pariter æqualia erunt: & conſequenter, appoſito communi quadrato ex EK, erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato.

Jam

Jam duplum rectanguli EAK una cum EK quadrato eſt æquale duobus quadratis AK, AE. Quare erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duobus quadratis AK, AE, adeoque, dempto communi quadrato ex AK, remanebunt quadrata duo MN, EK æqualia quadrato ex AE. Unde quadratum diametri AE ſuperabit quadratum ſuæ parametri EK per MN quadratum, quod ex conſtructione datam differentiam adæquat.

FIG. 56. Quantum ad ſecundum caſum, ſolutio problematis fiet hoc pacto. Extendatur rurſus tangens BH ad partem alteram verſus M: ita, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum, juncta AM, erigatur ſuper ea perpendicularis MN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, ſi in angulo ABH applicemus rectam AK æqualem ipſi AN; erit AE diameter quæſita.

Quum enim AM quadratum ſit æquale duplo quadrati ex AB, ſive etiam duplo rectanguli EAK: appoſito communi quadrato ex MN; erit AN, ſive AK quadratum æquale duplo rectanguli EAK una cum MN quadrato: & propterea, addito rurſus communi quadrato ex AE; erunt duo quadrata AK, AE æqualia duplo rectanguli EAK una cum duobus quadratis AE, MN.

Et quoniam duo quadrata AK, AE ſunt æqualia quoque duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato; erit EK quadratum æquale duobus quadratis AE, MN. Unde quadratum diametri AE ſuperabitur a quadrato

ſuæ

ſuæ parametri EK per MN quadratum, quod ex conſtructione datam differentiam adæquat.

XII. In ultimo problemate docebimus, *quomodo, datis axibus ellipſis, inveniri poſſit diameter talis, ut data ſit ſumma quadratorum, quæ fiunt ex lateribus ſuæ figuræ*. Hunc in finem, manentibus omnibus, ut ſupra, ponamus rectam PQ eſſe ejus longitudinis, ut duplum rectanguli ex AB in PQ datam illam ſummam exhibeat. Tum, deſcripta ſuper ea circuli portione PSQ, quæ ſuſcipiat angulum ſemirectum, erigatur perpendicularis PT, æqualis dimidio ipſius AB. Et per punctum T ducatur recta TS, eidem PQ parallela, quæ circuli portionem ſecet in S.

XII. *Datis axibus ellipſis, invenire diametrum, in qua data ſit ſumma quadratorum, quæ fiunt ex lateribus ſuæ figuræ.*

FIG. 57

Sit deinde E punctum, quod biſecat portionem CED. Et quoniam, demiſſo perpendiculo EG, fiunt duæ EG, PT æquales inter ſe; poterit triangulum PSQ ita quidem aptari ſuper AB, ut punctum S cadat in E. Aptetur itaque triangulum illud ſuper AB ea lege, ſitque OER. Erigatur porro perpendicularis ON. Et juncta AN, dabit iſta diametrum quæſitam.

Extendatur enim AN uſque donec tangenti BH occurrat in M. Et quoniam angulus OER, velut æqualis angulo PSQ, eſt æqualis angulo BAE; per ea, quæ oſtenſa ſunt in calce capitis præcedentis, erit ſumma quadratorum AN, NM æqualis duplo rectanguli, quod fit ex AB in OR. Sed ex conſtructione OR eſt æqualis ipſi PQ. Quare eadem ſumma quadratorum AN, NM æqualis erit du-

duplo rectanguli, quod ſit ex AB in PQ; atque adeo data erit.

Non eſſe autem problema iſtud continuo ſolutionis capax; jam abunde patet ex iis, quæ in fine capitis præcedentis oſtenſa ſunt. Sed exinde facili quoque negotio intelligere licet, quid utique requiratur, quo poſſit problema reſolvi. Unde, ne diutius in eo explicando hæreamus, ſufficiat illud indicaſſe, & ad alia progrediamur.

XIII. *Datis axibus ellipſis, definire in ordine ad eos poſitionem cujuſvis diametri datæ.* FIG. 58.

XIII. Apollonius in ſolutione horum problematum aliam methodum paulo difficiliorem uſurpavit. Sed ea mediante exhibuit quoque poſitionem diametri relate ad datos axes ellipſis. Unde, ne ex hoc capite methodus a nobis adhibita manca exiſtimetur; oſtendemus modo, *qua ratione datis axibus ellipſis, definiri poſſit relate ad eos poſitio cujuſvis diametri datæ.*

Sint itaque AB, KL axes ellipſis, hoc eſt AB axis major, & KL axis minor. Sit autem EF aliqua ejuſdem ellipſis diameter data. Jam innoteſcet diametri hujus poſitio, ſi demiſſa ad axem majorem AB ordinata EG, nota ſit longitudo portionis CG. Unde, eo res redit, ut inquiramus quo pacto ipſius CG longitudo poſſit definiri.

Et ſane, propter ellipſim, CA quadratum eſt ad CK quadratum, ut rectangulum AGB ad EG quadratum. Sed EG quadratum æquale eſt differentiæ quadratorum CE, CG, & rectangulum AGB æquale eſt differentiæ quadratorum CA, CG. Itaque erit, ut CA quadratum ad CK quadratum, ita differentia

qua-

quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CE, CG.

Hinc, quum convertendo fit, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CK, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CA, CE: erit, permutando, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CG, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CA, CE. Unde, rurſus convertendo, erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CE, CK.

Deſcribantur jam ſuper ipſis CA, CE ſemicirculi AMC, ENC; & aptentur in iis rectæ CM, CN, quarum utraque ſit æqualis ipſi CK. Jamque, junctis rectis AM, EN; erit AM quadratum æquale differentiæ quadratorum CA, CK; & EN quadratum æquale differentiæ quadratorum CE, CK. Unde erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita AM quadratum ad EN quadratum: & propterea, quum proportionales ſint quatuor rectæ AM; EN, CA, CG; invenietur CG, ſi fiat, ut AM ad EN, ita CA ad ipſam CG.

XIV. *In ellipſi, data parametro unius diametri, invenire parametrum cujuſvis alterius diametri.*

XIV. Ne aliquid hic omittamus, oſtendemus denique, *qua ratione in ipſa ellipſi, data parametro unius diametri, inveniri poſſit parameter cujuſvis alterius diametri.* Sint igitur AB, EF duæ quævis diametri ellipſis AEF. Et data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire parametrum alterius diametri EF. FIG. 59.

Sit AD parameter diametri AB, quæ cum

cum ipſa AB ponatur in directum. Tum, ſecta AD bifariam in puncto M, deſcribatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipſi EF productæ in puncto N. Extendatur porro EN uſque ad punctum H; ita, ut ſit EH dupla ipſius EN. Et erit EH parameter diametri EF.

Eſt enim, propter circulum, rectangulum ACM æquale rectangulo ECN. Sed rectangulum ABD eſt quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH eſt quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH eſt quadruplum rectanguli ECN. Quare duo rectangula ABD, EFH etiam æqualia erunt: & propterea erit, ut diameter EF ad diametrum AB, ita BD ad FH.

Jam per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, diametri EF, AB ſunt reciproce proportionales ſummis laterum ſuarum figurarum. Quare erit ex æquali, ut BD ad FH, ita ſumma laterum figuræ diametri AB ad ſummam laterum figuræ diametri EF: & propterea, quemadmodum prior ſumma eſt æqualis ipſi BD; ita quoque ſumma poſterior æqualis erit ipſi FH. Unde erit EH parameter diametri EF.

CAP.

CAP. III.

Hyperbolæ diametri omnes inter ſe mutuo comparantur.

I. CONſtat, ex ſuperius oſtenſis, in qualibet hyperbola extare diametrum unam, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat. Diametrum iſtam vocavimus axem ipſius hyperbolæ. Et facile erit oſtendere, *omnium hyperbolæ diametrorum minimam eſſe illam, quæ axis appellatur.* I. *Omnium hyperbolæ diametrorum minima quidem eſt axis.* FIG. 40.

Sit enim AB axis hyperbolarum oppoſitarum, ſitque EF alia quævis diameter earundem. Dico, diametrum iſtam EF majorem eſſe axe AB.

Demittatur ſiquidem ad axem AB ordinata EG. Et quia iſta cadit infra verticem A; erit portio CG major ſemiaxe CA. Sed, ob angulum rectum CGE, ſemidiameter CE major eſt portione CG. Quare eadem ſemidiameter CE multo major erit ſemiaxe CA: & propterea diameter tota EF major erit axe integro AB.

II. Nullo itidem negotio oſtendi poteſt, quod *omnium aliarum diametrorum illa quidem ſit minor, quæ minus diſtat ab axe.* II. *Aliarum autem illa minor eſt, quæ minus diſtat ab axe.*

Manentibus namque omnibus, ut ſupra, perſpicuum eſt, CE quadratum æquale eſſe duobus quadratis CG, EG. Sed CG quadratum eſt æquale CA quadrato una cum re- FIG. 40.

ctangulo AGB. Quare erit idem CE quadratum æquale duobus quadratis CA, EG una cum rectangulo AGB.

Id quum ita ſit, liquet, exceſſum, quo CE quadratum ſuperat CA quadratum, eſſe EG quadratum una cum rectangulo AGB. Sed, tam EG quadratum, quam rectangulum AGB, eo quidem fit minus, quo magis punctum E accedit ad punctum A. Itaque exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CA quadratum, eo etiam minor erit, quo minus diſtant a ſe invicem puncta duo A, & E.

Minuitur ergo CE quadratum, dum punctum E accedit ad punctum A. Unde ipſa CE etiam diminutionem patitur. Eſt autem diameter EF dupla ipſius CE. Quare minuetur quoque diameter EF: & propterea omnium aliarum diametrorum hyperbolæ illa quidem minor erit, quæ minus diſtat ab axe.

III. Coniugatæ diametri per ordinatas, ſuper iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.

III. Hyperbolæ igitur diametri in receſſu ab axe majores evadunt. Sed, iis creſcentibus, augentur etiam ipſarum conjugatæ. Quod ut liquido conſtet, oſtendendum eſt prius ſequens theorema.

FIG. 40.

Nimirum, quod *ſi capiantur in hyperbola binæ quævis conjugatæ diametri, eæ dividantur in eadem ratione ab ordinatis, quæ ſuper iis demittuntur ex verticibus duarum quarumvis aliarum ſimiliter conjugatarum diametrorum.*

Neque vero difficile erit, theorema iſtud oſtendere, ſi eorum recordemur, quæ ſuperius oſtenſa ſunt. Capiantur enim in hyperbola duæ quævis conjugatæ diametri AB, KL. Demittantur ad eas ordinatæ EG, PQ ex verti-

ci-

cibus duarum quarumvis aliarum ſimiliter conjugatarum diametrorum EF, PR. Dico, fore, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

Ducatur ſiquidem ad diametrum EF ordinata AO. Tum per punctum O agatur recta OS, ipſi EG parallela. Et jam CK ad CQ rationem habebit compoſitam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ. Sed CK eſt ad CP, ut KL ad PR, ſive etiam, ut EG ad AO; itemque CP eſt ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione compoſita ex EG ad AO, & ex AO ad OS.

Et quoniam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, ſive etiam CE ad CO; erit ex æquali, ut CK ad CQ, ita CE ad CO; & ſubducendo, antecedentes ex conſequentibus, erit quoque ut CK ad KQ, ita CE ad EO. Sed, ſumptis antecedentium duplis, KL eſt ad KQ, ut EF ad EO. Quare, componendo, erit, ut LQ ad KQ, ita FO ad EO: & propterea, quum FO ſit ad EO, ut eſt BG ad AG; erit rurſus ex æquali, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

IV. Ex iſto autem theoremate *prono alveo fluit*, quadratum quidem ordinatæ EG eſſe æquale rectangulo KQL; quadratum vero ordinatæ PQ æquale eſſe rectangulo AGB.

IV. *Præcedentis proprietatis elegans conſectarium, reſpiciens quadrata earum ordinatarum.*

Quum enim BG ſit ad AG, ut eſt LQ ad KQ; erit dividendo, ut AB ad AG, ita KL ad KQ. Unde, quia permutando AB eſt ad KL, tam ut AG ad KQ, quam ut BG ad LQ; compoſitis rationibus, erit, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum KQL. FIG. 40.

 Jam,

Jam, propter hyperbolam, AB quadratum eſt ad KL quadratum, tam ut rectangulum AGB ad EG quadratum, quam ut PQ quadratum ad rectangulum KQL. Quare ex æquali, primo quidem erit, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita idem rectangulum AGB ad EG quadratum. Deinde vero, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita PQ quadratum ad idem rectangulum KQL: & propterea rectangulo quidem KQL æquale erit EG quadratum; rectangulo vero AGB erit æquale PQ quadratum.

V.
Aliud ejuſdem proprietatatis conſectarium, etiam notatu dignum.
FIG. 40.

V. Supponamus modo AB, KL eſſe axes conjugatos hyperbolæ; adeo nempe, ut ordinatæ EG, PQ rectos angulos cum iis conſtituant. Et *nullo etiam negotio oſtendemus*, differentiam quadratorum EF, AB æqualem eſſe differentiæ quadratorum PR, KL.

Ut enim vidimus paulo ante, exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CA quadratum, eſt EG quadratum una cum rectangulo AGB. Sed rectangulo AGB oſtenſum eſt æquale PQ quadratum. Quare exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CA quadratum, erit ſumma quadratorum EG, PQ.

Eadem ratione exceſſus, quo CP quadratum ſuperat CK quadratum, eſt PQ quadratum una cum rectangulo KQL. Sed rectangulo KQL oſtenſum eſt æquale EG quadratum. Quare exceſſus, quo CP quadratum ſuperat CK quadratum, erit pariter ſumma quadratorum EG, PQ.

Id quum ita ſit, erit differentia quadratorum CE, CA æqualis differentiæ quadratorum

rum

rum CP, CK. Sed ipſarum CE, CA, CP, CK duplæ ſunt EF, AB, PR, KL. Quare differentia quadratorum EF, AB differentiæ quadratorum PR, KL etiam æqualis erit.

VI. Atque hinc modo facile erit oſtendere id, quod ab initio nobis propoſuimus: nimirum, quod, *creſcentibus hyperbolæ diametris primariis, augeri debeant quoque ipſarum conjugatæ*. VI. *Creſcentibus diametris primariis, augentur etiam ipſarum conjugatæ.*

Maneant enim omnia, ut ſupra: adeo nempe, ut AB ſit axis hyperbolæ, KL ejus conjugatus; EF diameter quævis primaria, & PR ipſius conjugata. Dico, non poſſe diametrum EF majorem fieri, niſi etiam augeatur ejus conjugata PR. FIG. 40.

Oſtenſum eſt namque, exceſſum, quo EF quadratum ſuperat AB quadratum, eſſe æqualem exceſſui, quo PR quadratum ſuperat KL quadratum. Quare nequit augeri prior exceſſus, niſi etiam exceſſus ſecundus major evadat.

Jam, ubi per receſſum ab axe AB major evadit diameter EF, tunc augetur exceſſus, quo EF quadratum ſuperat AB quadratum. Itaque in eodem receſſu neceſſe eſt, ut augeatur etiam exceſſus, quo PR quadratum ſuperat KL quadratum: & propterea ipſa PR major itidem evadet.

VII. Sed ex eo, quod differentia quadratorum EF, AB ſit æqualis differentiæ quadratorum PR, KL, *colligi ulterius poteſt*, diametrum EF eſſe æqualem, majorem, vel minorem conjugata ſua PR, prout axis AB eſt æqualis, major, vel minor conjugato ſuo KL. VII. *Quomodo ſit qualibet ex diametris primariis relata ad ſuam conjugatam.* FIG. 40.

Ponamus etenim primo, axem AB æqualem eſſe conjugato ſuo KL. Dico, etiam diametrum EF adæquare conjugatam ſuam PR. Nam ſi major, vel minor eſſet; foret differentia quadratorum EF, AB major quoque, vel minor differentia quadratorum PR, KL. Quod plane repugnat.

Ponamus ſecundo, axem AB majorem eſſe conjugato ſuo KL. Dico, etiam diametrum EF majorem eſſe conjugata ſua PR. Nam, ſi æqualis, vel minor eſſet; foret differentia quadratorum EF, AB minor differentia quadratorum PR, KL. Quod quidem eſt falſum.

Ponamus denique, axem AB minorem eſſe conjugato ſuo KL. Dico, etiam diametrum EF minorem eſſe conjugata ſua PR. Nam, ſi æqualis, vel major eſſet; foret differentia quadratorum EF, AB major differentia quadratorum PR, KL; quum tamen ei æqualis eſſe debeat.

VIII. *Locus omnium diametrorum hyperbolæ poteſt per data cujuſdam rectæ portionem exhiberi.* FIG. 60

VIII. Cæterum, ut alia quamplurima, quæ locum habent in comparatione diametrorum hyperbolæ, tum hic, cum in ſequentibus facilius proſequi valeamus; juvat hic advertere, quod *locus diametrorum omnium hyperbolæ per datæ alicujus rectæ portionem poſſit exhiberi.*

In triangulo namque ABC, rectangulo in B, referat hypothenuſa AC eum ex duobus axibus conjugatis hyperbolæ, qui major eſt;& latus BC axem alterum minorem. Extendatur porro latus iſtud BC in directum verſus X. Et dico, portionem ejus CX conſide-

ſiderari poſſe veluti locum omnium diametrorum hyperbolæ.

Primo enim, ex ſuperius oſtenſis, quælibet diameter, quæ ad eas hyperbolas terminatur, in quibus ſuos terminos habet axis AC, debet eſſe major ipſo axe AC. Sed omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad rectam CX, majores ſunt ipſa AC. Itaque poterunt rectæ iſtæ omnes earum hyperbolarum diametros exhibere.

Deinde, ſi AE ſit aliqua earum diametrorum, ejus conjugata talis eſſe debet, ut exceſſus, quo ipſius quadratum ſuperat BC quadratum, ſit æqualis exceſſui, quo AE quadratum ſuperat AC quadratum. Unde facile erit oſtendere, quod debeat eſſe BE conjugata ipſius AE.

Eſt enim BE quadratum æquale BC, CE quadratis una cum duplo rectanguli BCE. Quare exceſſus, quo BE quadratum ſuperat BC quadratum, erit CE quadratum una cum duplo rectanguli BCE. Sed hujuſmodi eſt etiam exceſſus, quo AE quadratum ſuperat AC quadratum. Itaque differentia quadratorum BE, BC æqualis erit differentiæ quadratorum AE, AC: & propterea, ſicuti BC eſt conjugatus axis AC, ſic erit BE conjugata diametri AE.

IX. Hoc jacto principio, jam circa diametros conjugatas hyperbolæ plura alia facillime licebit oſtendere. Ac primo quidem oſtendemus, quod *differentia quadratorum, quæ fiunt ex axibus conjugatis, æqualis ſit differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex aliis duabus dia-* IX.

Differentia quadratorum ex axibus eſt æqualis differentia quadratorum ex aliis binis

diametris conjugatis. *metris ſimiliter conjugatis.*

FIG. 60. Ut enim rectæ AC, BC referunt axes hyperbolæ conjugatos, ſic rectæ AE, BE referant binas ejus diametros ſimiliter conjugatas. Dico, differentiam quadratorum AC, BC æqualem eſſe differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex ipſis AE, BE.

Ob triangulum namque ABC, rectangulum in B, eſt AC quadratum æquale duobus quadratis AB, BC. Quare differentia quadratorum AC, BC æqualis erit quadrato, quod fit ex AB.

Simili ratione, ob triangulum ABE, rectangulum in B, eſt AE quadratum æquale duobus quadratis AB, BE. Quare differentia quadratorum AE, BE æqualis erit quadrato, quod fit ex AB.

Eidem igitur AB quadrato æqualis eſt, tam differentia quadratorum AC, BC, quam differentia quadratorum AE, BE. Quare differentia quadratorum AC, BC æqualis erit differentiæ quadratorum AE, BE.

X. *Theorema primum de ratione, quam habet diameter primaria ad ſuam conjugatam.*

X. Oſtendemus deinde, quod *quum axis hyperbolæ major eſt ſuo conjugato, non modo omnis alia diameter major erit conjugata ſua, ſed etiam ratio axis ad ſuum conjugatum major erit ratione, quam quævis alia diameter habet ad conjugatam ſuam.*

FIG. 60. Jam enim clare patet, quod ſicuti axis AC major eſt conjugato ſuo BC, ita quævis alia diameter AE major ſit quoque conjugata ſua BE. Sed facile erit etiam oſtendere, quod AC ad BC majorem rationem habeat, quam AE ad BE.

Du-

Ducta ſiquidem per punctum E recta EF, ipſi AC parallela, quæ conveniat cum AB in F; erit, ut AC ad BC, ita FE ad BE. Sed, ob angulum rectum EBF, FE major eſt, quam AE; atque adeo FE ad BE majorem rationem habet, quam AE ad BE. Quare etiam AC ad BC majorem rationem habebit, quam AE ad BE.

Simili autem ratione oſtendemus, quod ſi fuerit AG quævis alia hyperbolæ diameter, remotior ab axe AC; ratio, quam habet diameter AE, axi propinquior, ad ſuam conjugatam BE, major ſit ratione, quam habet diameter AG, ab axe remotior, ad conjugatam ſuam BG.

XI. *Theorema ſecundum de eadem ratione, quam habet diameter primaria ad ſuam conjugatam.* *Fig. 60.*

XI. Oſtendemus porro, quod *quum per contrarium axis hyperbolæ minor eſt ſuo conjugato, tunc non ſolum omnis alia diameter minor erit conjugata ſua, ſed etiam ratio axis ad ſuum conjugatum minor erit ratione, quam quævis alia diameter habet ad conjugatam ſuam.*

Jam enim liquido patet, quod ſicuti axis BC minor eſt ſuo conjugato AC, ita quævis alia diameter BE minor ſit quoque conjugata ſua AE. Sed nullo etiam negotio oſtendemus, quod BC ad AC minorem rationem habeat, quam BE ad AE.

Ducta ſiquidem per punctum E recta EF, ipſi AC parallela, quæ conveniat cum AB in puncto F; erit, ut BC ad AC, ita BE ad FE. Sed, ob angulum rectum EBF, FE major eſt, quam AE; atque adeo BE ad FE minorem rationem habet, quam BE ad AE.

Qua-

Quare etiam BC ad AC minorem rationem habebit, quam BE ad AE.

Simili autem ratione oſtendemus, quod ſi fuerit BG, quævis alia hyperbolæ diameter, remotior ab axe BC; ratio, quam habet diameter BE, axi propinquior, ad ſuam conjugatam AE, minor ſit ratione, quam habet diameter BG, ab axe remotior, ad conjugatam ſuam AG.

XII. *Theoremata de ſumma, rectangulo, & differentia duarum hyperbolæ conjugatarum diametrorum.*

XII. Ulterius ex eo, quod creſcentibus hyperbolæ diametris, augeantur etiam ipſarum conjugatæ, ultro ſequitur, *tam ſummam, quam rectangulum ex duabus hyperbolæ diametris conjugatis, eo magis augeri, quo magis ipſæ diametri ab axibus recedunt.*

Sed quantum attinet *ad differentiam earundem diametrorum, ea per contrarium eo minor evadit, quo magis diametri ab axibus removentur; tandemque in infinita diſtantia differentia illa prorſus evaneſcit, & ipſæ diametri fiunt inter ſe mutuo æquales.*

FIG. 60. Manentibus namque omnibus, ut ſupra, extendatur CB uſque in H, ut fiat AC æqualis ipſi CH. Jamque, ſi oſtendi poſſit, AE minorem eſſe, quam EH; erit differentia axium AC, BC major differentia diametrorum AE, BE. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Jungatur AH. Et quoniam duæ AC, CH ſunt æquales inter ſe; erit angulus CAH æqualis pariter angulo CHA. Sed angulus EAH major eſt angulo CAH. Quare idem angulus EAH erit etiam major angulo EHA: & propterea AE minor erit, quam EH.

Simili ratione oſtendemus, differentiam dia-

diametrorum AE, BE, axibus propinquiorum, majorem eſſe differentia diametrorum AG, BG, ab iiſdem axibus remotiorum. Quare differentia inter binas hyperbolæ diametros conjugatas eo minor evadet, quo magis ipſæ diametri ab axibus removentur.

XIII. *Parllelogrammum, circa duas hyperbolæ conjugatas diametros deſcriptum, eſt æquale rectangulo ſub axibus* Fig. 61.

XIII. Nolim autem hoc loco reticere, quod etſi rectangulum ex binis hyperbolæ diametris conjugatis eo majus evadat, quo magis ipſæ diametri ab axibus removentur, atque adeo ad æqualitatem accedunt; attamen *parallelogrammum, circa binas hyperbolæ conjugatas diametros deſcriptum, ſit ejuſdem ubique magnitudinis, hoc eſt æquale ſemper rectangulo, quod ſub ipſis axibus continetur.*

Sint enim AB, KL axes hyperbolæ conjugati; ſintque etiam EF, PR binæ ejus conjugatæ diametri. Ducantur per puncta E, & F rectæ QS, TV, ipſi PR parallelæ; tum item per puncta P, & R rectæ QV, TS, æquidiſtantes ipſi EF: ita, ut circa diametros conjugatas EF, PR deſcriptum ſit parallelogrammum QSTV. Dico, parallelogrammum iſtud æquale eſſe rectangulo, quod ſub axibus AB, KL continetur.

Demittatur, tum ad axem AB ordinata EG, cum ad diametrum EF ordinata AO. Et, ex ſuperius oſtenſis, erit, ut EG ad AO, ita KL ad PR; ſive etiam, ita CK ad CP. Sed, demiſſis ſuper CE, CP perpendicularibus AI, EH, EG eſt ad AO in ratione compoſita ex EG ad AI, & ex AI ad AO; hoc eſt in ratione compoſita ex CE ad CA, & ex EH ad CE. Quare etiam CK ad CP rationem habebit compoſi-

tam

tam ex EH ad CE, & ex CE ad CA.

Jam duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EH ad CA. Quare erit ex æquali, ut CK ad CP, ita EH ad CA; & propterea rectangulum ex CP in EH, hoc eſt parallelogrammum PCEQ, erit æquale rectangulo, quod fit ex CA in CK. Sed parallelogrammum QSTV eſt quadruplum parallelogrammi PCEQ, & rectangulum ſub axibus AB, KL eſt quadruplum rectanguli ACK. Quare etiam parallelogrammum QSTV æquale erit rectangulo ſub axibus AB, KL.

XIV. *Theoremata ex angulis, quos conjugatæ diametri in hyperbola centro conſtituunt.*

XIV. Hinc vero plura deducuntur *circa angulos, quos hyperbolæ conjugatæ diametri occurſu mutuo in centro conſtituunt.*

Nimirum primo, quod *ſinus anguli, ſub duabus quibuslibet conjugatis diametris contenti, ſit ad radium, ut eſt rectangulum ſub axibus ad id, quod ſub ipſis diametris continetur.*

FIG. 61. Poſitis enim omnibus, ut ſupra, ſinus anguli ECP eſt ad radium, ut EH ad CE; ſive etiam, ut rectangulum ex CP in EH ad rectangulum ex CP in CE. Sed rectangulum ex CP in EH oſtenſum eſt æquale rectangulo ACK: quod quidem eſt ad rectangulum ex CP in CE, ut rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR. Quare erit ex æquali, ut ſinus anguli ECP ad radium, ita rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR.

Secundo, quod *ſinus angulorum, quos conjugatæ diametri occurſu mutuo in centro conſtituunt, ſint reciproce, ut rectangula, quæ*

fiunt

ſiunt ex ipſis diametris conjugatis.

Jam enim oſtenſum eſt, quod ſinus anguli, quem duæ quævis conjugatæ diametri continent, ſit ad radium, ut eſt rectangulum ſub axibus ad id, quod ſub ipſis diametris continetur. Quare, ex æquo perturbando, ſinus anguli duarum conjugatarum erit ad ſinum anguli, quem aliæ duæ conjugatæ comprehendunt, ut eſt rectangulum iſtarum ad id, quod ex iis efficitur.

Denique, quod *angulus acutus, ſub binis hyperbolæ diametris conjugatis comprehenſus, eo minor evadat, quo magis ipſæ diametri ab axibus removentur.*

Nam, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum, quod binæ hyperbolæ conjugatæ diametri continent, eo majus evadit, quo magis eæ diametri ab axibus recedunt. Sed ei rectangulo eſt reciproce proportionalis ſinus anguli, ſub iiſdem diametris contenti. Quare per contrarium, tam ſinus, quam ipſe angulus acutus, ad quem ſinus refertur, neceſſe eſt, ut eo minor fiat, quo magis conjugatæ diametri ab axibus removentur.

C A P. V.

Parametri diametrorum hyperbolæ inter ſe mutuo conferuntur.

I. Comparatis inter ſe mutuo diametris hyperbolæ, ſequitur, ut parametros *I. Duæ hyperbolæ diame-*

tri conjugatæ ſunt continue proportionales cum ſuis parametris, ubi inverſo ordine inter eas collocantur.
FIG.62.

tros ipſarum ad invicem conferamus. Et primo quidem, *quum conjugatæ fuerint eæ diametri, quarum parametros ſimul conferre oportet, facile erit, de iis parametris dijudicare.*

In parametris enim, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur, iſtud obtinet theorema, quod *ipſæ diametri continuam cum eis proportionem conſtituant, ubi inverſo ordine inter illas collocantur.*

Sint enim hyperbolæ AB, KL binæ ejus diametri conjugatæ. Sit autem AD parameter unius AB, & KI parameter alterius KL. Dico, diametros AB, KL, inverſo ordine poſitas inter ſuas parametros AD, KI, continuam cum eis proportionem conſtituere.

Quoniam enim KL eſt conjugata ipſius AB; erit, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Et ſimiliter, quoniam AB eſt conjugata ipſius KL; erit ut KL ad AB, ita AB ad KI. Quare quatuor AD, KL, AB, KI continue proportionales erunt.

II.
Comparatio parametrorum, quæ ad duas hyperbolæ diametros conjugatas referuntur.
FIG.62.

II. Hinc autem *plura deducuntur circa parametros, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Nimirum primo, quod ſi duæ conjugatæ diametri AB, KL inter ſe ſint æquales; etiam parametri AD, KI debeant eſſe æquales, tam inter ſe, quam cum diametris ſuis.

Secundo, quod ſi viciſſim duæ conjugatæ diametri AB, KL ſint inæquales; parametri quoque AD, KI debeant eſſe inæquales, tam inter ſe, quam cum qualibet earum diametrorum.

Tertio, quod ex diametris AB, KL ea,

quæ

quæ major eſt, habeat parametrum, tum ipſa, cum diametro altera minorem; illa vero, quæ minor eſt, parametrum habeat, etiam altera diametro majorem.

Quarto, quod quum inæquales ſunt diametri AB, KL, & inæquales adeo ipſarum parametri AD, KI, ſumma parametrorum major ſit ſemper ſumma diametrorum.

Et denique, quod ſi capiatur differentia, tam inter diametrum AB, & parametrum ſuam AD, quam inter diametrum KL, & ſuam parametrum KI; ea quidem differentia ſit major, quæ ad minorem diametrum, majoremque adeo parametrum refertur.

III. *In hyperbola differentia inter quadratum diametri, & ejus figuram eſt eadem ubique.*

III. Ubi autem diametri non fuerint conjugatæ, ſed ad eaſdem hyperbolas terminatur, poterit de parametris ipſarum judicium ferri, oſtenſo prius hoc theoremate, quod *differentia inter quadratum alicujus diametri, & figuram ejus ſit eadem ubique.*

FIG. 62.

Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, quod differentia inter quadratum diametri AB, & figuram ejus, quæ conſtituitur per rectangulum DAB, ſit ſemper eadem, quocumque in loco capiatur diameter AB.

Ex ſuperius ſiquidem oſtenſis, differentia quadratorum, quæ fiunt ex diametris conjugatis AB, KL, ubique reperitur æqualis differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex axibus; & conſequenter ubique eſt eadem. Sed quadratum ex KL eſt æquale rectangulo DAB. Quare eadem pariter ubique erit differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB.

IV. In-

IV. *Duæ hyperbolæ diametri ſunt reciproce proportionales cum differentiis laterum ſuarum figurarum.* Fig. 62.

IV. Inde vero inferre licet, *duas quaſvis diametros hyperbolæ reciproce proportionales eſſe differentiis laterum ſuarum figurarum.*

Ut enim diametri AB parameter eſt AD, ita ſit EH parameter cujuſvis alterius diametri EF. Dico, AB eſſe ad EF, ut eſt differentia ipſarum EF, EH ad differentiam, quæ eſt inter ipſas AB, AD.

Ob oſtenſum namque theorema, differentia inter quadratum alicujus diametri, & figuram ejus eſt eadem ubique. Quare differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB æqualis erit differentiæ inter EF quadratum, & rectangulum HEF.

Jam differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB tantundem valet, ac rectangulum ex AB in differentiam ipſarum AB, AD. Et ſimiliter differentia inter EF quadratum, & rectangulum HEF perinde eſt, ac rectangulum ex EF in differentiam ipſarum EF, EH. Quare, quum æqualia ſint inter ſe duo iſta rectangula; erit, ut AB ad EF, ita differentia duarum EF, EH ad differentiam duarum AB, AD.

V. *Ex binis diametris, ad eaſdem hyperbolas terminatis ea majorem parametrum habet, quæ major eſt.* Fig. 62.

V. Atque hinc modo facile erit oſtendere, quod *ex binis diametris, ad eaſdem hyperbolas terminatis ea, quæ major eſt, majorem parametrum habeat.*

Maneant enim omnia, ut ſupra. Et ponamus, diametrum AB minorem eſſe diametro EF. Dico, parametrum AD, quæ refertur ad diametrum minorem, eſſe etiam minorem parametro EH, quæ refertur ad diametrum majorem.

Oſten-

Oſtenſum eſt namque, quod diameter AB ſit ad diametrum EF, ut eſt differentia ipſarum EF, EH ad differentiam, quæ eſt inter ipſas AB, AD. Quare, ſicuti AB minor eſt, quam EF; ita & differentia duarum EF, EH minor erit differentia duarum AB, AD.

Differentia igitur inter diametrum EF, & parametrum ſuam EH eſt minor differentia, quæ eſt inter diametrum AB, & parametrum ſuam AD. Sed EF major eſt, quam AB. Itaque EH multo major erit, quam AD.

Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, quod, ſicuti omnium diametrorum hyperbolæ minima eſt ea, quæ axis vocitatur; ſic omnium parametrorum illa quidem ſit minima, quæ refertur ad axem. Et quemadmodum omnes aliæ diametri in receſſu ab axe continuo augentur; ſic & parametri earundem in eodem receſſu perpetuo quoque majores evadunt.

VI. *Quod præcedens proprietas non univerſaliter obtineat in diametris, minoribus parametris ſuis.*

VI. Notetur autem hic ſedulo velim, *proprietatem iſtam* veram eſſe in iis tantummodo diametris, quæ majores ſunt ſuis parametris; quum allata demonſtratio dumtaxat in eis illius veritatem evincat. Sed longe ſecus ſe res habet in diametris illis, quæ parametris ſuis ſunt minores; quum in eis duo ſunt caſus diſtinguendi.

Primus caſus eſt, quum quadratum axis non eſt minus dimidio quadrati, quod fit ex ſuo conjugato. Et quum id contingit, minima quidem parameter eſt ea, quæ refertur ad axem; aliarum autem eæ ſemper ſunt minores, quæ ad diametros item minores referuntur: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit,

quod, creſcentibus diametris, augeantur etiam parametri ipſarum.

Alter caſus eſt, quum quadratum axis minus eſt dimidio quadrati, quod fit ex ſuo conjugato. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet ſemiſſem quadrati, quod fit ex ejus conjugata; erit parameter iſtius diametri omnium minima, tum item aliarum eæ ſemper minores erunt, quæ referuntur ad diametros, minus ab illa diſtantes.

VII. *Oſtenduntur caſus, qui obtinent, definiendo primum parametros diametrorum.*

VII. Neque vero difficile erit, *utriuſque caſus veritatem oſtendere*. Si enim in triangulo rectangulo ABC referat latus BC axem hyperbolæ, & hypothenuſa AC ejus conjugatum; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, exhibente BE aliam quamvis diametrum, exhibebit AE conjugatam illius. Unde, erectis ſuper ipſis AC, AE perpendiculis AI, AL; fiet CI parameter axis BC, & EL parameter diametri BE.

FIG. 63.

Quum enim in triangulo rectangulo CAI ex angulo recto A demiſſa ſit ad hypothenuſam CI perpendicularis AB; erit, ut BC ad AC, ita AC ad CI. Sed parameter axis BC eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem, & ejus conjugatum. Itaque, quum ſit AC conjugatus axis BC, erit CI parameter ejuſdem axis BC.

Eadem ratione, quoniam in triangulo rectangulo EAL ex angulo recto A demiſſa eſt ad hypothenuſam EL perpendicularis AB; erit, ut BE ad AE, ita AE ad EL. Sed parameter diametri BE eſt tertia proportionalis poſt ipſam diametrum, & ejus conjugatam,

Ita-

Itaque, quum ſit AE conjugata diametri BE, erit EL ejuſdem diametri param ter.

VIII. *Demonſtratio prædictorum caſuum in medium affertur.* FIG. 63.

VIII. Quemadmodum ergo CI eſt parameter axis BC, ita EL eſt parameter diametri BE. Et quoniam anguli CAI, EAL, qui cruribus ſuis abſcindunt ex eadem AX portiones CI, EL, ſunt æquales inter ſe; jam hic etiam ſumus in eo caſu, in quo angulus rectilineus vertitur circa verticem ſuum, & ex recta, poſitione data, cruribus ſuis parpetuo portionem aliquam abſcindit.

Hinc, ſiquidem MAN ſit poſitio anguli recti, in qua crura ejus æqualia fiunt; erit portio MN omnium minima; tum item aliarum eæ ſemper minores erunt, quæ ad ipſam MN magis accedunt. Unde eo res redit, ut oſtendamus, BC quadratum non minus eſſe dimidio quadrati, quod fit ex AC, quotieſcumque BC non minor eſt, quam BM; eſſe vero minus, quum per contrarium BC minor eſt, quàm BM.

Id vero liquet abunde. Nam, propter æquales AM, AN, ſunt etiam æquales duæ AB, BM. Quare, quum BC non minor eſt, quam BM, nec etiam minor erit, quam AB: & propterea quadratum ejus nec item minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC. Viciſſim vero, quum BC minor eſt, quam BM; erit BC minor quoque, quam AB: adeoque BC quadratum minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC.

IX. *Deſiniuntur parametri diametrorum, quæ iis*

IX. Cæterum *nolim hic ſilentio præterire*, quod ſicuti, erectis ſuper ipſis AC, AE perpendiculis AI, AL, fiunt CI, EL parametri

ſunt majores. ipſarum BC, BE; ita, demiſſis ſuper iiſdem
FIG. 63. AC, AE perpendiculis BH, BK, fiant portiones CH, EK parametri, quæ referuntur ad ipſas AC, AE.

Quum enim in triangulo rectangulo ABC ex angulo recto B demiſſa ſit ad hypothenuſam AC perpendicularis BH; erit, ut AC ad BC, ita BC ad CH. Sed parameter axis AC eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem, & ejus conjugatum. Itaque, quum ſit BC conjugatus axis AC, erit CH parameter ejuſdem axis AC.

Simili ratione, quoniam in triangulo rectangulo ABE ex angulo recto B demiſſa eſt ad hypothenuſam AE perpendicularis BK; erit, ut AE ad BE, ita BE ad EK. Sed parameter diametri AE eſt tertia proportionalis poſt ipſam diametrum, & ejus conjugatam. Itaque, quum ſit BE conjugata diametri AE, erit EK ejuſdem diametri parameter.

Jam, ſi ſuper AB, velut diametro, ſemicirculus deſcribatur, tranſibit iſte per illa eadem puncta, in quæ cadunt perpendiculares BH, BK. Unde portio ſuæ circumferentiæ AH conſiderari poterit veluti locus parametrorum, quæ referuntur ad diametros AC, AE. Et inde rurſus apparet, quod creſcentibus hiſce diametris, augeri debeant quoque parametri ipſarum.

X.
Quod diametri reciproce proportiales ſint differentiis laterum ſuarum figurarum.

X. Ex his omnibus colligi etiam denuo poteſt veritas theorematis ſuperius oſtenſi, quod *duæ quævis hyperbolæ diametri ſint reciproce proportionales differentiis laterum ſuarum figurarum*. Nam facile erit oſtendere, rectan-

ctangulum ex diametro quavis in differentiam laterum ſuæ figuræ adæquare ſemper quadratum datæ rectæ AB.

rum ſeorſum oſtenditur.

FIG. 63.

Sit enim primo AE diameter, de qua agitur. Et quoniam, ex oſtenſis, EK eſt ejus parameter; erit AK differentia laterum ſuæ figuræ. Unde eo res redit, ut oſtendamus, rectangulum ex AE in AK æquale eſſe quadrato ex AB. Quod quidem liquet abunde; quum tres rectæ AE, AB, AK ſint in continua proportione.

Sit ſecundo BE diameter, de qua eſt quæſtio. Et quoniam, per ſuperius oſtenſa, EL eſt parameter ejus; erit BL differentia laterum ſuæ figuræ. Unde eo res redit, ut oſtendamus, rectangulum ex BE in BL æquale eſſe quadrato ex AB. Quod quidem ad huc liquido patet; quum tres rectæ BE, AB, BL ſint in continua proportione.

XI. Quamquam autem vi hujus theorematis *differentia laterum figuræ diametri minuatur, creſcente diametro*; attamen non perinde res eſt *de ſumma eorundem laterum*. Ubi enim diametri majores ſunt ſuis parametris; tunc, quia cum diametro augetur quoque parameter ejus, neceſſe eſt, ut ſumma laterum figuræ cum eadem diametro pariter augeatur. Ubi vero diametri minores ſunt parametris ſuis; tunc duo oportet caſus diſtinguantur.

XI. *Theoremata de ſumma, & differentia laterum figuræ diametri.*

FIG. 63.

Primus caſus eſt, quum quadratum axis non eſt minus triente quadrati, quod fit ex ſuo conjugato. Et quum id contingit, ſumma laterum figuræ ipſius axis erit omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum,

axi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eodem axe remotiorem: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit quod, creſcente diametro, augeatur etiam ſumma laterum ſuæ figuræ.

Alter caſus eſt, quum quadratum axis eſt minus triente quadrati, quod fit ex ſuo conjugato. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet trientem quadrati, quod fit ex ejus conjugata; erit ſumma laterum figuræ iſtius diametri omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, ipſi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eadem remotiorem.

XII. *Demonſtratio caſuum, qui locum habent in ſumma, quum diametri ſunt minores ſuis parametris.* Fig. 63.

XII. Pendet autem *utriuſque caſus demonſtratio ex præclaro iſto theoremate*, quod manentibus omnibus, ut ſupra, ſi angulus rectus CAI revolvatur circa verticem ſuum A, ſumma duarum BC, CI eo minor evadat, quo magis ipſe angulus ad eam poſitionem accedit, in qua quadratum cruris AC adæquat ſemiſſem quadrati, quod fit ex crure altero AI.

Sit enim MAN poſitio anguli recti, in qua quadratum cruris AM eſt æquale dimidio quadrati, quod fit ex crure altero AN. Erit igitur ſumma duarum BM, MN omnium minima; tum item aliarum ſummarum eæ ſemper minores erunt, quæ ad ſummam illam magis accedunt. Unde eo res redit, ut oſtendamus, BC quadratum non minus eſſe triente quadrati, quod fit ex AC, quotieſcumque BC non minor eſt, quam BM; eſſe vero minus, quum viciſſim BC minor eſt, quam BM.

Id vero facili negotio oſtendemus. Eſt

enim

enim AM quadratum ad AN quadratum, ut BM ad BN. Unde, ſicuti AM quadratum eſt dimidium quadrati, quod fit ex AN; ita quoque BM ſemiſſis erit ipſius BN. Hinc, quotieſcumque BC non minor eſt, quam BM, nec etiam BC minor erit, tum ſemiſſe ipſius BI, cum triente totius CI: adeoque, quia BC quadratum eſt ad AC quadratum, ut BC ad ad CI, nec item BC quadratum minus erit triente quadrati, quod fit ex AC. Viciſſim vero, quum BC minor eſt, quam BM, erit BC minor triente ipſius CI; & BC quadratum minus quoque triente quadrati, quod fit ex AC.

XIII. *Theorema de differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus.* Fig. 63.

XIII. Memorabile eſt autem, quod locum habet *in differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*. Iſta enim in diametris, quæ ſunt majores parametris ſuis, augetur, creſcente diametro; in diametris vero, quæ parametris ſuis ſunt minores, minuitur, ubi diameter creſcit: adeo, ut omnium minima eſt illa, quæ refertur ad axem.

Capiatur etenim primo diameter AE, quæ major eſt parametro ſua EK. Et quoniam AE quadratum eſt æquale AK, EK quadratis una cum duplo rectanguli AKE, ſive etiam duplo quadrati, quod fit ex BK; erit differentia quadratorum AE, EK æqualis quadrato ex AK una cum duplo quadrati ex BK; atque adeo æqualis duobus quadratis AB, BK. Sed ſumma horum quadratorum eo major evadit, quo magis augetur diameter AE. Quare, creſcente diametro AE, augetur etiam differentia quadratorum AE, EK.

Capiatur ſecundo diameter BE, quæ minor eſt parametro ſua EL. Et quoniam EL quadratum eſt æquale BE, BL quadratis una cum duplo rectanguli EBL, ſive etiam duplo quadrati, quod ſit ex AB; erit differentia quadratorum BE, EL æqualis quadrato ex BL una cum duplo quadrati ex AB; atque adeo æqualis duobus quadratis AB, AL. Sed ſumma horum quadratorum eo minor evadit, quo magis augetur diameter BE. Quare, creſcente diametro BE, minuitur differentia quadratorum BE, EL.

XIV. *Theorema ſumma quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus.* Fig. 63.

XIV. Reliquum jam eſt, ut, quid obtineat *in ſumma quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*, breviter oſtendamus. Sane in diametris, quæ majores ſunt ſuis parametris, ea creſcit, creſcente diametro. Et ratio eſt, quia una cum diametro augetur quoque parameter ejus. In diametris autem, quæ parametris ſuis ſunt minores, duo ſunt caſus diſtinguendi.

Primus caſus eſt, quum quadratum axis non eſt minus dimidio quadrati, quod fit ex differentia laterum ſuæ figuræ. Et quum id contingit, ſumma quadratorum ex lateribus figuræ ipſius axis, erit omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, axi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eodem axe remotiorem: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit, quod creſcente diametro, augeatur quoque ſumma qudratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus.

Alter caſus eſt, quum quadratum axis eſt minus dimidio quadrati, quod fit ex diffe-

ren-

rentia laterum ſuæ figuræ. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet ſemiſſem quadrati ex differentia laterum figuræ ejus; erit ſumma quadratorum ex lateribus figuræ iſtius diametri omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, ipſi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eadem remotiorem.

XV. Utriuſque autem *caſus demonſtratio pendet ex hoc altero eleganti theoremate*, quod manentibus omnibus, ut ſupra, ſi angulus rectus CAI revolvatur circa verticem ſuum A, ſumma quadratorum ex ipſis BC, CI eo minor evadat, quo magis ipſe angulus ad eam poſitionem accedit, in qua quadratum cruris AC eſt ad quadratum alterius cruris AI in eadem illa ratione, quam habet latus cujuſque quadrati ad ejus diagonalem.

XV. *Demonſtratio ſ caſuum, qui obtinent, quotieſcumque diametri parametris ſuis ſunt minores.*

Fig. 63.

Sit enim MAN poſitio anguli recti; in qua quadratum cruris AM eſt ad quadratum alterius cruris AN, ut eſt latus cujuſque quadrati ad ejus diagonalem. Erit igitur ſumma quadratorum ex ipſis BM, MN omnium minima; tum item aliarum ſummarum eæ ſemper minores erunt, quæ ad ſummam illam magis accedunt. Unde eo res redit, ut oſtendamus, BC quadratum non minus eſſe dimidio quadrati, quod fit ex BI, quotieſcumque BC non minor eſt, quam BM; eſſe vero minus, quum viciſſim BC minor eſt, quam BM.

Id vero nullo negotio oſtendemus. Eſt enim AM quadratum ad AN quadratum, ut BM ad BN. Unde, ſicuti AM quadratum eſt ad AN quadratum, ut latus cujuſque quadra-

ti

ti ad ejus diagonalem ; ita in hac eadem ratione erit quoque BM ad BN : & propterea BM quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod fit ex BN . Hinc, quotieſcumque BC non minor eſt , quam BM , nec etiam BC quadratum minus erit dimidio quadrati, quod fit ex BI . Quotieſcumque vero BC minor eſt , quam BM, erit itidem BC quadratum minus dimidio quadrati , quod fit ex BI.

CAP. VI.

Solvuntur problemata quædam circa hyperbolæ diametros, & parametros.

I. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum data ſit ratio.* FIG. 60.

I. COmparatis inter ſe mutuo, tam diametris, quam parametris hyperbolæ ; ſequitur modo, ut problemata quædam reſolvamus, quæ circa eas inſtitui poſſunt. Primum itaque problema hoc erit : *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter ſe* . Quem in finem referat in triangulo rectangulo ABC hypothenuſa AC axem majorem, & latus BC axem minorem.

Per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, jam eo res redit, ut producta BC verſus X, inveniatur in CX tale quidem punctum E, ut AE ad BE ſit in data illa ratione . Itaque, quia ducta CS, ipſi AE parallela, AE eſt ad BE, ut CS ad BC ; erit CS ad BC ſimiliter

in

in illa data ratione. Unde ſolvetur propoſitum problema, applicando intra angulum ABC rectam CS, quæ ad axem minorem BC datam habeat rationem; & ducendo per punctum A rectam AE, ipſi CS parallelam.

Patet autem, in ſolutione propoſiti problematis illud a nobis aſſumptum eſſe, ut ratio data ſit majoris ad minus. Unde, ſi fuerit minoris ad majus, neceſſe eſt, ut ea invertatur. Sed liquet etiam, rationem datam minorem eſſe debere ea, quam habet axis major ad axem minorem; quia aliter punctum E reperiretur in ipſo axe minore BC, atque adeo problema impoſſibile foret.

II. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.* FIG. 64.

II. Secundum problema ita ſe habet: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant*. Maneant omnia, ut ſupra, & producta CB verſus T, ſit ABT rectangulum datum, quod quidem majus eſſe debet rectangulo ACB. Secetur AB bifariam in S. Et juncta ST, extendatur AB verſus V, ita ut SV ipſi ST ſit æqualis. Deſcribatur deinde ſuper AV ſemicirculus AEV; & erunt AE, BE diametri quæſitæ.

Quum enim duæ ST, SV inter ſe ſint æquales; erit quoque ST quadratum æquale quadrato, quod ſit ex SV. Sed ST quadratum eſt æquale duobus quadratis BS, BT; & SV quadratum eſt æquale rectangulo AVB una cum BS quadrato. Itaque erunt quadrata duo BS, BT æqualia rectangulo AVB una cum BS quadrato: & propterea, dempto communi quadrato ex BS, ſupererit

BT

BT quadratum æquale rectangulo AVB.

Et quoniam, juncta VE, rectangulum AVB æquale eſt VE quadrato; erit etiam BT quadratum æquale VE quadrato. Unde, quum duæ BT, VE inter ſe ſint æquales; erit rectangulum ABT æquale rectangulo ex AB in VE. Sed rectangulum ex AB in VE eſt æquale rectangulo AEB; quum AB ſit ad AE, ut eſt BE ad VE. Quare rectangulum AEB erit æquale rectangulo ABT: & propterea duæ AE, BE erunt quæſitæ diametri.

III.

Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam ſummam conficiant.

III. Tertium problema in hunc modum concipitur: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam ſummam conficiant*. Iiſdem, ut ſupra, manentibus, capiatur recta data ſuper BX, & ſit BZ, quam ex ſuperius oſtenſis majorem eſſe oportet ſumma duorum axium AC, BC. Jungatur deinde AZ, cui perpendicularis erigatur AT, ipſi BZ occurrens in T. Secetur poſtea TZ bifariam in E; & juncta AE, exhibebunt duæ AE, BE quæſitas diametros.

Fig. 64.

Quum enim angulus ZAT ſit rectus, ſemicirculus deſcriptus ſuper TZ, velut diametro, tranſibit per punctum A. Sed centrum hujus ſemicirculi eſt punctum E: ut quod ex conſtructione dividit bifariam diametrum ejus TZ. Quare duæ AE, EZ æquales erunt inter ſe: proindeque, quia appoſita communi BE, fiunt duæ AE, BE æquales toti BZ, erunt eædem AE, BE optatæ diametri.

IV.

Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diame-

IV. Quartum problema hujuſmodi erit: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia ſit data*. Ejus autem

autem ſolutio eſt fere eadem cum præcedente. Capiatur enim differentia data ſuper CB producta, & ſit BT, quam, per ſuperius oſtenſa, minorem eſſe oportet differentia axium AC, BC. Jungatur deinde AT, cui perpendicularis erigatur AZ, ipſi BT occurrens in Z. Secetur poſtea TZ bifariam in E. Et juncta AE, fient AE, BE diametri quæſitæ.

tros conjugatas, quarum differentia ſit data.

FIG. 64.

Nam ſimiliter, quum angulus ZAT ſit rectus, ſemicirculus, qui deſcribitur ſuper TZ, velut diametro, tranſibit per punctum A, Sed centrum hujus ſemicirculi eſt punctum E: quippe quod dividit ex conſtructione bifariam diametrum ejus TZ. Quare duæ AE, TE æquales erunt inter ſe: & propterea, quemadmodum BT eſt differentia duarum TE, BE; ita erit eadem BT differentia duarum AE, BE.

V.
Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata datam ſummam conſtituant.

V. Quintum problema ita proponetur: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata datam ſummam conſtituant*. Ejus autem reſolutio nullam difficultatem involvit. Quum enim differentia eorundem quadratorum æqualis eſſe debeat differentiæ, quæ eſt inter quadrata axium; utique data erit, tam ſumma, quam differentia eorum quadratorum.

Hinc, ſiquidem ad dimidium ſummæ addatur dimidium differentiæ, habebitur quadratum diametri majoris. Quod ſi autem ex dimidio ſummæ auferatur dimidium differentiæ, orietur quadratum diametri minoris. Quare diametrorum quadrata data etiam erunt ſeorſim; & conſequenter dabuntur quoque

ipſæ

ipſæ diametri, quas oportet invenire.

Sicuti autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quarum ſumma ſit data, neceſſe eſt, ut data iſta ſumma ſit major ſumma axium; ita quoque, quum invenire oportet binas conjugatas diametros, quarum quadrata datam ſummam conſtituant, illud quidem requiritur, ut iſtiuſmodi data ſumma ſit major ſumma quadratorum, quæ fiunt ex axibus.

VI. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant.*

VI. Sextum problema hunc in modum efferemus: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant.* Sed facile erit, problema iſtud ad ſecundum revocare, in quo datis axibus hyperbolæ, quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

Nam ſemper ac datus eſt angulus, quem quæſitæ diametri continent; data erit ratio, quam habet ejus ſinus ad radium. Sed ratio iſta eſt æqualis ei, quam habet rectangulum ſub axibus ad id, quod ſub ipſis diametris continetur. Quare etiam hæc alia ratio data erit: & propterea, quum datum ſit rectangulum ſub axibus, dabitur quoque rectangulum, quod continent quæſitæ diametri.

VII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, quæ datam parametrum habeat.*

VII. In ſeptimo problemate illud porro quæremus, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, invenire liceat diametrum, quæ datam parametrum habeat.* Hujus autem problematis, perinde ac eorum omnium, quæ ſequuntur, duo

Fig. 65.

erunt caſus, Nam diameter, quam quærimus, vel invenienda eſt inter eas, quæ terminantur

tur ad hyperbolas axis majoris; vel etiam inter illas, quæ ſuos terminos habent in hyperbolis axis minoris.

In priore caſu erigatur ſuper AB perpendicularis BQ, quæ dimidium datæ parametri adæquet. Tum, juncta AQ, deſcribatur centro Q, intervalloque QB circuli circumferentia, cum qua ipſa AQ conveniat in punctis T, & V. Denique in angulo ABC applicetur recta AE, æqualis ipſi AV. Et erit AE diameter quæſita.

Demiſſo enim ſuper AE perpendiculo BK, erit eidem AB quadrato æquale, tam rectangulum EAK, quam rectangulum TAV, Quare duo iſta rectangula EAK, TAV æqualia erunt inter ſe: & propterea, quemadmodum ſunt æquales duæ AE, AV, ita æquales erunt pariter, tam duæ AK, AT, quam duæ EK, TV. Sed TV, velut dupla ipſius BQ, datam parametrum adæquat. Et igitur eidem parametro æqualis quoque erit ipſa EK, quæ eſt parameter diametri AE.

In ſecundo vero caſu applicetur in angulo ABQ recta AQ, quæ ſemiſſem adæquet datæ parametri. Fiat deinde QE æqualis ipſi AQ. Et erit BE quæſita diameter. Nam, ſi centro Q, intervalloque QE ſemicirculus deſcribatur, ipſi BE occurrens ad partem alteram in L: ob angulum rectum EAL, erit EL parameter ipſius BE; adeoque, quum EL ſit dupla ipſius QE, ſive AQ, erit EL datæ parametro æqualis.

VIII. Ad octavum problema quod attinet, quæremus in eo, *qua ratione, datis axibus* hy- VIII. *Datis axibus hyperbola*,

Invenire diametrum, quæ ad parametrum ſuam datam habeat rationem.

FIG. 64.

hyperbolæ, inveniri poſſit diameter, quæ ad parametrum ſuam datam habeat rationem. Et ubi quidem data ratio eſt majoris ad minus, diameter, quam quærimus, invenienda eſt inter eas, quæ terminantur ad hyperbolas axis majoris. Quotieſcumque vero eſt minoris ad majus, comperienda inter illas, quæ ſuos terminos habent in hyperbolis axis minoris.

In priore caſu extendatur AB uſque in V: ita, ut AV ad BV ſit in data ratione. Deſcribatur deinde ſuper AV ſemicirculus AEV. Et erit AE diameter quæſita. Nam, demiſſo ſuper AE perpendiculo BK, fiet EK parameter ipſius AE. Sed AE eſt ad EK, ut AV ad BV. Itaque diameter AE ad parametrum ſuam EK erit in data ratione.

In ſecundo caſu extendatur quoque AB uſque in V, ſed ita tamen, ut BV ad AV ſit in data ratione. Poſtea deſcribatur ſimiliter ſuper AV ſemicirculus AEV. Et erit BE diameter optata. Nam, erecto ſuper AE perpendiculo AL, fiet EL parameter ipſius BE. Sed BE eſt ad EL, ut BV ad AV. Itaque diameter BE ad parametrum ſuam EL erit in data ratione.

Idem problema poteſt etiam ad primum revocari. Nam, ſemper ac data eſt ratio, quam quæſita diameter habere debet ad ſuam parametrum; utique data erit pariter ratio, quam eadem quæſita diameter habebit ad ſuam conjugatam: quippe quæ illius eſt duplicata. Unde viciſſim primum problema ad octavum iſtud poterit reduci: quærendo nempe diametrum, quæ ad ſuam parametrum habeat ratio-

nem

nem ſubduplicatam ejus, quæ inter utramque diametrum eſſe debet.

IX. Nonum problema eo ſe vertet, ut *datis axibus hyperbolæ, inveniatur diameter, quæ, vel conſtituat datam ſummam cum ſua parametro, vel differat ab ea per datam differentiam.* Et quantum ad priorem partem, ſolvetur problema in eum, qui ſequitur, modum.

IX. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, quæ vel conſtituat datam ſummam cum ſua parametro, vel differat ab ea per datam differentiam.*

Sit primo dimameter invenienda ex earum numero, quæ parametris ſuis ſunt majores. Extendatur CB verſus M, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum, juncta AM, erigatur ſuper ea perpendicularis MN æqualis dimidio datæ ſummæ. Deſcribatur deinde centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, conveniens cum AN in punctis O, & R. Jamque, ſi in angulo ABC applicetur recta AE, æqualis dimidio ipſius AO; fiet AE diameter quæſita.

Fig. 65.

Demittatur enim ſuper AE perpendicularis BK; eritque, tam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, quam rectangulum EAK æquale quadrato ex AB. Sed, ex conſtructione, AM quadratum duplum eſt quadrati ex AB. Quare etiam rectangulum OAR duplum erit rectanguli EAK: proindeque, ſecta AO bifariam in S, fiet rectangulum SAR æquale rectangulo EAK; atque adeo, ob æquales AE, AS, erunt etiam æquales, tam duæ AK, AR, quam duæ EK, RS. Unde, additis æqualibus AE, OS; erit ſumma duarum AE, EK æqualis toti OR, quæ dupla eſt ipſius MN.

Sit deinde diameter invenienda ex nu-

mero illarum, quæ viciſſim ſunt minores ſuis parametris. Extendatur quoque CB verſus M, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum, juncta AM, fiat adhuc angulus rectus AMN, in quo tamen applicetur recta AN, æqualis dimidio datæ ſummæ. Deſcribatur pariter centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, conveniens cum AN in punctis O, & R. Jamque, ſi ex BX abſcindatur portio BE, æqualis dimidio ipſius AO; fiet BE diameter quæſita.

Erigatur enim ſuper AE perpendicularis AL; eritque, tam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, quam rectangulum EBL æquale quadrato ex AB. Sed, ex conſtructione, AM quadratum duplum eſt quadrati ex AB. Quare etiam rectangulum OAR duplum erit rectanguli EBL: proindeque, ſecta AO bifariam in S, fiet rectangulum SAR æquale rectangulo EBL; atque adeo, ob æquales BE, AS, erunt etiam æquales duæ BL, AR. Unde ſumma duarum BE, EL æqualis erit ſummæ duarum AO, AR, quæ dupla eſt ipſius AN.

Quantum ad ſecundam partem, nullo negotio ſolvetur problema. Nam, ſi diameter invenienda ſit inter eas, quæ parametris ſuis ſunt majores; ſatis erit, in ſemicirculo, deſcripto ſuper AB velut diametro, applicare rectam AK, quæ ſit æqualis datæ differentiæ; quandoquidem iſta, producta uſque ad E, dabit diametrum quæſitam. Quod ſi vero diameter comperienda ſit inter eas, quæ minores ſunt ſuis parametris; tunc extendatur

CB

CB uſque in L, ut ſit BL æqualis differentiæ datæ. Et, erecta ſuper AL perpendiculari AE, ſiet BE diameter optata.

X. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, cujus parameter cum differentia laterum figuræ datum rectangulum contineat.* FIG. 63.

X. Decimum problema illud oſtendet, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, invenire liceat diametrum, cujus parameter cum differentia laterum figuræ datum rectangulum contineat.* Jamque, ſi diameter invenienda debet eſſe ex numero earum, quæ ſuis parametris ſunt majores, ſolvetur problema, ſi deſcripto ſuper AB, velut diametro ſemicirculo AKB, applicetur in eo recta BK, cujus quadratum datum rectangulum adæquet. Nam, juncta AK fiet, AE diameter quæſita.

Quum enim diametri AE parameter quidem ſit EK, differentia vero laterum figuræ ſit AK; erit AKE rectangulum, quod ſit ex parametro ejus in differentiam laterum ſuæ figuræ. Sed rectangulum AKE eſt æquale quadrato ipſius BK. Quare, ſicuti BK quadratum, ex conſtructione, datum rectangulum adæquat; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum AKE.

Quod ſi vero diameter invenienda debeat eſſe ex numero illarum, quæ minores ſunt ſuis parametris, ſolvetur problema, ſi producta CB verſus L, applicetur in angulo ABL recta AL talis longitudinis, ut ejus quadratum ſit æquale dato rectangulo. Nam, ſi deinde ſuper AL perpendicularis erigatur AE, ipſi BC occurrens in E; fiet BE diameter optata.

Quum enim diametri BE parameter quidem ſit EL, differentia vero laterum figuræ

ſit BL ; erit ELB rectangulum , quod fit ex parametro ejus in differentiam laterum ſuæ figuræ . Sed rectangulum ELB eſt æquale quadrato ipſius AL . Quare , ſicuti AL quadratum , ex conſtructione , datum rectangulum adæquat ; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum ELB.

Hoc idem problema poterat etiam ad præcedens revocari . Quum enim datum ſit rectangulum , quod fit ex parametro in differentiam laterum figuræ ; & rectangulum ex diametro in eandem illam differentiam ſimiliter ſit datum : dabitur quoque differentia horum rectangulorum , hoc eſt quadratum ex differentia laterum figuræ ; & conſequenter ipſa laterum differentia etiam data erit. Unde eo res redit , ut quæramus diametrum, quæ differat a ſua parametro per datam differentiam.

XI. *Datis axibus hyperbolæ , invenire diametrum, cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam.*

XI. In undecimo problemate oſtendemus *quo pacto , datis axibus hyperbolæ , inveniri poſſit diameter , cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam .* Atque hic quoque duo ſunt caſus diſtinguendi . Nam quæſita diameter, vel invenienda eſt inter eas , quæ parametris ſuis ſunt majores ; vel etiam inter illas , quæ viciſſim ſunt minores ſuis parametris .

FIG. 66. Quantum ad priorem caſum ſolvetur problema in hunc modum . Extendatur CB verſus M , ut fiat BM æqualis ipſi AB . Tum juncta AM , deſcribatur ſuper ea , velut diametro, ſemicirculus ANM , in quo applicetur recta MN talis longitudinis , ut quadratum ejus

ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, ſi in ſemicirculo AKB applicemus rectam AK, æqualem ipſi AN; erit AE diameter quæſita.

Quum enim AK ſit æqualis ipſi AN, erunt quadrata duo AK, MN æqualia quadrato ex AM. Sed quadratum ex AM, velut duplum quadrati, quod ſit ex AB, eſt æquale duplo rectanguli EAK. Quare quadrata duo AK, MN duplo rectanguli EAK pariter æqualia erunt: & conſequenter, appoſito communi quadrato ex EK, erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato.

Jam duplum rectanguli EAK una cum EK quadrato eſt æquale duobus quadratis AK, AE. Quare erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duobus quadratis AK, AE; adeoque, dempto communi quadrato ex AK, remanebunt quadrata duo MN, EK æqualia quadrato ex AE. Unde quadratum diametri AE ſuperabit quadratum ſuæ parametri EK per MN quadratum, quod ex conſtructione datam differentiam adæquat.

Quantum ad ſecundum caſum, ſolutio problematis fiet hoc pacto. Extendatur rurſus CB verſus M, ut fiat BM æqualis ipſi AB. Tum, juncta AM, erigatur ſuper ea perpendicularis MN. Et in angulo AMN applicetur recta AN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Fiat poſtea BL æqualis ipſi MN. Et, erecta ſuper AL perpendiculari AE, erit BE diameter quæſita. FIG. 65.

Quum enim AM quadratum ſit æquale

duplo quadrati ex AB, ſive etiam duplo rectanguli EBL: appoſito communi quadrato ex MN, ſive BL; erit AN quadratum æquale duplo rectanguli EBL una cum BL quadrato: & propterea, addito rurſus communi quadrato ex BE, erunt duo quadrata AN, BE æqualia duplo rectanguli EBL una cum duobus quadratis BL, BE.

Et quoniam duplum rectanguli EBL una cum duobus quadratis BL, BE eſt æquale quadrato, quod fit ex EL; erit EL quadratum æquale duobus quadratis AN, BE. Unde quadratum diametri BE ſuperabitur a quadrato ſuæ parametri EL per AN quadratum, quod ex constructione datam differentiam adæquat.

XII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, in qua data ſit ſumma quadratorũ, quæ fiunt ex lateribus ſuę figuræ.* FIG. 64.

XII. In ultimo problemate docebimus, *quomodo, datis axibus hyperbolæ, inveniri poſſit diameter talis, ut data ſit ſumma quadratorum, quæ fiunt ex lateribus ſuæ figuræ.* Ac primo quidem, ſi diameter invenienda debeat eſſe ex earum numero, quæ parametris ſuis ſunt majores, ſolvetur problema in cum, qui ſequitur, modum.

Extendatur AB uſque in Y, ita ut duplum rectanguli ABY datam illam ſummam exhibeat. Tum ſecetur AY ita quidem in puncto V, ut AB quadratum ſit æquale duplo rectanguli AVY. Deſcribatur poſtea ſuper AV, velut diametro, ſemicirculus AEV. Et recta AE exhibebit diametrum quæſitam.

Nam, demiſſa ſuper AE perpendiculari BK, erit ſumma quadratorum AE, EK ad ſummam quadratorum AV, BV, ut eſt AE

qua-

quadratum ad AV quadratum; ſive etiam, ut eſt AB ad AV; ſive demum, ut eſt rectangulum ABY ad rectangulum ex AV in BY. Sed ſumma quadratorum AV, BV eſt æqualis duplo rectanguli ex AV in BY; quum rectangulum iſtud ſit æquale rectangulo AVB una cum rectangulo AVY, quod ex conſtructione æquale eſt dimidio quadrati ex AB. Quare etiam ſumma quadratorum AE, EK æqualis erit duplo rectanguli ABY.

Quod ſi vero diameter invenienda debeat eſſe ex numero illarum, quæ minores ſunt ſuis parametris, ſolvetur problema hac ratione. Extendatur quoque AB uſque in Y, ſed ita tamen, ut duplum rectanguli BAY exhibeat datam ſummam. Tum ſecetur BY ita quidem in puncto V, ut AB quadratum ſit æquale duplo rectanguli BVY. Deſcribatur poſtea ſuper AV, velut diametro, ſemicirculus AEV. Et recta BE exhibebit quæſitam diametrum.

Nam, erecto ſuper AE perpendiculo AL, erit ſumma quadratorum BE, EL ad ſummam quadratorum BV, AV, ut eſt BE quadratum ad BV quadratum; ſive etiam, ut eſt AB ad BV; ſive demum, ut eſt rectangulum BAY ad rectangulum ex BV in AY. Sed ſumma quadratorum BV, AV eſt æqualis duplo rectanguli ex BV in AY; quum rectangulum iſtud ſit æquale rectangulo BVA una cum rectangulo BVY, quod ex conſtructione æquale eſt dimidio quadrati ex AB. Quare etiam ſumma quadratorum BE, EL æqualis erit duplo rectanguli BAY.

XIII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire in ordine ad eos poſitionem cujuſvis diametri data.*

XIII. Cæterum, quæ requirantur, ut ſingula iſta problemata reſolvi poſſint, abunde nos docent, tum ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, tum ipſæ eorum problematum allatæ ſolutiones. Unde, ne diutius in iis recenſendis hæreamus, ſufficiat iſtud indicaſſe, & ad theoriæ hujus complementum oſtendemus modo, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, definiri poſſit relate ad eos poſitio cujuſvis diametri datæ*. Nam in ſolutione illorum problematum apolloniana exhibetur quoque poſitio diametri relate ad datos axes hyperbolæ.

FIG. 67. Sint itaque AB, KL axes hyperbolæ. Sit autem EF aliqua ejuſdem hyperbolæ diameter data, quæ ſuos terminos habeat in iiſdem illis hyperbolis, ad quas terminatur axis major AB. Jam innoteſcet diametri hujus poſitio, ſi demiſſa ad axem AB ordinata EG, nota ſit longitudo portionis CG. Unde, eo res redit, ut inquiramus, quo pacto ipſius CG longitudo poſſit definiri.

Et ſane, propter hyperbolam, CA quadratum eſt ad CK quadratum, ut eſt rectangulum AGB ad EG quadratum. Sed EG quadratum æquale eſt differentiæ quadratorum CE, CG; & rectangulum AGB æquale eſt differentiæ quadratorum CA, CG. Itaque erit, ut CA quadratum ad CK quadratum, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CE, CG.

Hinc, quum convertendo ſit, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CK, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CA, CE; erit, per-

mu-

mutando, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CG, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CA, CE. Unde, addendo antecedentes conſequentibus, erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CE, CK.

Deſcribantur jam ſuper ipſis CA, CE ſemicirculi AMC, ENC; & aptentur in iis rectæ CM, CN, quarum utraque ſit æqualis ipſi CK. Jamque, junctis rectis AM, EN, erit AM quadratum æquale differentiæ quadratorum CA, CK; & EN quadratum æquale differentiæ quadratorum CE, CK. Unde erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita AM quadratum ad EN quadratum: & propterea, quum proportionales ſint quatuor rectæ AM, EN, CA, CG; invenietur CG, ſi fiat, ut AM ad EN, ita CA ad ipſam CG.

XIV. *In hyperbola data parametro unius diametri, invenire parametrum cujuſvis alterius diametri.* Fig. 68.

XIV. Ne aliquid hic omittamus, oſtendemus denique, *qua ratione in ipſa hyperbola, data parametro unius diametri, inveniri poſſit parameter cujuſvis alterius diametri*. Sint igitur AB, EF duæ quævis hyperbolæ diametri. Et, data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire parametrum alterius diametri EF.

Sit AD parameter diametri AB, quæ ſuper ipſa AB capiatur. Tum, ſecta AD bifariam in puncto M, deſcribatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipſi EF in puncto N. Abſcindatur porro ex EF portio EH, quæ ſit dupla ipſius EN. Et erit EH parameter diametri EF. Eſt

Eſt enim, propter circulum, rectangulum ACM æquale rectangulo ECN. Sed rectangulum ABD eſt quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH eſt quadruplum rectanguli ECN. Quare duo rectangula ABD, EFH etiam æqualia erunt: & propterea erit, ut diameter EF ad diametrum AB, ita BD ad FH.

Jam per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, diametri EF, AB ſunt reciproce proportionales differentiis laterum ſuarum figurarum. Quare erit ex æquali, ut BD ad FH, ita differentia laterum figuræ diametri AB ad differentiam laterum figuræ diametri EF: & propterea, quemadmodum prior differentia eſt æqualis ipſi BD; ita quoque differentia poſterior æqualis erit ipſi FH. Unde erit EH parameter diametri EF.

C A P. VII.

Parametri diametrorum parabolæ inter ſe mutuo comparantur.

I. Theorema fundamentale pro inſtituenda comparatione parametrorum parabolæ.

I. Diametros parabolæ haud quidem neceſſe eſt, ut inter ſe mutuo conferamus. Nam, quum ſint infinitæ longitudinis, ex mutua ipſarum comparatione nihil quidem erui poteſt. Conferemus autem inter ſe invicem parametros diametrorum.

Fig. 69. Nam, velut finitæ longitudinis, inter ſe mutuo

tuo collatæ, plures nobis proprietates ſubminiſtrabunt.

Ad hanc comparationem inſtituendam *conducit non parum ſequens theorema*: nimirum, quod ſi AB ſit axis parabolæ, AD parameter ejus, AM ſubtenſa aliqua, ex axis vertice ducta, & MN ejuſdem axis ordinata: quod, inquam, quadratum ſubtenſæ AM ſit æquale rectangulo, quod ſit ex abſciſſa AN in ſummam ipſarum AD, AN.

Oſtendetur vero theorema iſtud in hunc modum. Quoniam MN eſt axis ordinata, erit angulus ANM rectus. Quare quadratum ipſius AM æquale erit duobus quadratis AN, MN. Sed, ob parabolæ naturam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN; & AN quadratum una cum rectangulo DAN eſt æquale ei, quod ſit ex AN in ſummam ipſarum AD, AN. Itaque quadratum ſubtenſæ AM erit æquale rectangulo, quod ſit ex abſciſſa AN in eam, quæ componitur ex ipſis AD, AN.

II. Theorema de exceſſu, quo parameter cujuſque diametri ſuperat parametrum axis. Fig. 69.

II. Sit jam EF diameter parabolæ, cujus ordinatæ parallelæ ſunt ſubtenſæ AM; ſitque etiam EH parameter ejus. Ducatur ex ejuſdem vertice E ordinata ad axem EG. Et *ex oſtenſo theoremate facile erit inferre*, quod parameter diametri EH ſuperet parametrum axis AD per quadruplum abſciſſæ AG.

Quum enim ſubtenſa AM a diametro EF ſecetur bifariam in O, erit MN dupla ipſius EG; adeoque MN quadratum quadruplum quadrati, quod ſit ex EG. Sed MN quadratum eſt ad EG quadratum, ut AN ad AG.

AG. Quare etiam AN quadrupla erit ipſius AG: & propterea, quia ex ſuperius oſtenſis duæ AG, EO ſunt æquales inter ſe; erit eadem AN quadrupla pariter ipſius EO.

Hinc, ſicuti AM quadratum quadruplum eſt AO quadrati, ita rectangulum ex EH in AN quadruplum erit rectanguli ex EH in EO: proindeque erit, ut AM quadratum ad AO quadratum, ita rectangulum ex EH in AN ad rectangulum ex EH in EO. Sed, ob parabolæ naturam, AO quadratum eſt æquale rectangulo ex EH in EO. Quare etiam AM quadratum æquale erit rectangulo ex EH in AN.

Et quoniam, per oſtenſum theorema, idem AM quadratum eſt æquale pariter rectangulo ex AN in ſummam ipſarum AD, AN; erit rectangulum iſtud æqnale ei, quod fit ex EH in AN: proindeque EH æqualis erit ipſis AD, AN ſimul ſumptis. Unde parameter diametri EH ſuperabit parametrum axis AD per AN, quæ eſt æqualis quadruplo ipſius AG.

III. *Cujuſmodi ſe habeant parametri diametrorum in parabola, demonſtratur.* FIG. 69.

III. Atque hinc modo liquet abunde, *omnium parabolæ parametrorum minimam eſſe illam, quæ refertur ad axem*; quum parameter cujuſvis alterius diametri ſuperet parametrum axis per quadruplum ejus abſciſſæ, quam aufert ab ipſo axe ordinata, ad eum ducta ex vertice diametri.

Patetque etiam, *aliarum parametrorum eam ſemper minorem eſſe, quæ refertur ad diametrum, axi propinquiorem.* Nam, quo magis diameter EF accedit ad axem AB, eo minor

nor evadit abſciſſa AG, per cujus quadruplum parameter diametri ſuperat parametrum ipſius axis.

Patetque demum, *æquales eſſe parametros earum diametrorum, quæ æqualiter hinc inde diſtant ab axe*. Nam ordinatæ, quæ ex ipſarum verticibus ducuntur ad axem, eandem ab ipſo axe auferunt abſciſſam; adeoque idem eſt exceſſus, per quem cujuſque diametri parameter ſuperat parametrum axis.

Vidimus autem, hæc omnia obtinere etiam, generaliter quidem in ellipſi, & in hyperbola tunc tantum, quum axis eſt major ſuo conjugato. Unde, quia utraque earum curvarum vertitur in parabolam, quotieſcumque centrum abit in infinitum; poterit hac item ratione eorum omnium veritas oſtendi.

IV. *Theorema de exceſſu, quo parameter diametri, ab axe remotioris, ſuperat parametrum diametri, eidem axi propinquioris.*

IV. In receſſu itaque diametri ab axe parabolæ, augetur parameter ejus. Sed, quemadmodum nobis innotuit exceſſus, per quem parameter cujuſque diametri ſuperat parametrum axis; ita licebit etiam, *exceſſum definire, per quem parameter diametri, ab axe remotioris, ſuperat parametrum diametri, eidem axi propinquioris.*

FIG. 69.

Maneant enim omnia, ut ſupra; ſitque KL diameter altera, remotior ab axe AB, cujus parameter ſit recta KI. Ducatur ex vertice ejus K ad axem AB ordinata KR, quæ occurrat diametro EF in puncto Q. Dico, parametrum KI ſuperare parametrum EH per quadruplum ipſius EQ.

Nam, ſicuti EH eſt æqualis AD una cum quadruplo ipſius AG; ita KI æqualis erit eidem

dem AD una cum quadruplo ipſius AR. Quare exceſſus, quo KI ſuperat EH, æqualis erit exceſſui, quo qudruplum abſciſſæ AR ſuperat quadruplum abſciſſæ AG. Sed exceſſus iſte eſt quadruplum ipſius GR, ſive EQ. Itaque per idem hoc quadruplum parameter KI ſuperabit parametrum EH.

Quod quum ita ſit, perſpicuum eſt, theorema generale, quod in hac re locum obtinet, ita quidem concipi debere; nimirum, *quod differentia parametrorum, quæ ad duas quaſvis diametros referuntur, ſit æqualis portioni, quam ex diametro, axi propinquiore, aufert perpendicularis ad eam ducta ex vertice alterius remotioris.*

V. *Exceſſus, quibus parametri diametrorum ſuperant parametrum axis, ſunt in duplicata ratione rectarum, quibus diametri diſtant ab axe.*

V. Sed nolo hic reticere pulcherrimum *iſtud theorema, reſpiciens exceſſus, quibus parametri aliarum diametrorum ſuperant parametrum axis*: ſcilicet, quod exceſſus iſti ſint inter ſe in duplicata ratione rectarum, quibus ipſæ diametri diſtant ab axe.

Eſto enim AB axis parabolæ, EF diameter propinquior, & KL diameter remotior. Sint autem AD, EH, KI parametri ipſarum. Dico, exceſſus, quibus parametri diametrorum EH, KI ſuperant parametrum axis AD, eſſe inter ſe in duplicata ratione rectarum, quibus ipſæ diametri EF, KL diſtant ab axe AB. (FIG. 69.)

Ducantur namque ex verticibus diametrorum E, & K ordinatæ ad axem EG, KR. Et quoniam ordinatę iſtæ rectos cum axe angulos conſtituunt, metientur eæ diſtantias diametrorum EF, KL ab ipſo axe AB. Unde eo res

re-

redit, ut oſtendamus, exceſſus, quibus parametri diametrorum EH, KI ſuperant parametrum axis AD, eſſe inter ſe, vuluti ſunt quadrata ordinatarum EG, KR.

Id vero oſtendemus in hunc modum. Exceſſus, quo EH ſuperat AD, eſt quadruplum abſciſſæ AG. Pariterque exceſſus, quo KI ſuperat AD, eſt quadruplum abſciſſæ AR. Quare exceſſus, quibus parametri diametrorum EH, KI ſuperant parametrum axis AD, erunt ut abſciſſæ AG, AR; atque adeo, ob parabolæ naturam, ut quadrata ordinatarum EG, KR.

VI. *Datis axe parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum, quæ habeat parametrum datam.* Fig. 69.

VI. Cæterum ex eo, quod parameter cujuſque diametri ſuperet parametrum axis per quadruplum ejus abſciſſæ, quam aufert ex axe ordinata ad eum ducta ex vertice diametri, facile erit, *datis axe parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum, quæ habeat parametrum datam.*

Sit enim AB axis parabolæ, & AD parameter ejus. Et quoniam parameter axis eſt omnium minima; utique parameter data major eſſe debet ipſa AD. Capiatur itaque exceſſus, quo data parameter ſuperat AD, & quadranti ejus æqualis conſtituatur abſciſſa AG. Erigatur porro ex puncto G perpendicularis GE, parabolæ occurrens in E. Et, ducta per punctum E recta EF, ipſi AB parallela, erit iſta diameter quæſita.

Eſto namque EH parameter ipſius EF. Jamque, ex ſuperius oſtenſis, parameter iſta EH ſuperabit parametrum axis AD per quadruplum abſciſſæ AG. Sed, ex conſtructione, per hoc idem quadruplum parameter

data ſuperat eandem AD. Quare erit EH æqualis datæ parametro: & propterea erit EF quæſita diameter.

VII.
Datis diametro aliqua parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum aliam, quæ datam habeat parametrum.

VII. Si loco axis, & ſuæ parametri detur diameter quævis alia cum parametro ejus, per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, etiam licebit *invenire diametrum alteram, quæ habeat parametrum datam*. Sed hic duo ſunt caſus diſtinguendi. Vel enim data parameter eſt major ea, quæ refertur ad diametrum datam, vel viciſſim minor.

Fig. 69.

In priore caſu ſolvetur problema in hunc modum. Sit EF diameter data, & EH parameter ejus. Capiatur exceſſus, quo data parameter ſuperat EH; & quadranti ejus æqualis conſtituatur portio EQ. Erigatur deinde ex puncto Q perpendicularis QK, parabolæ occurrens in K. Et, ducta per punctum K recta KL, ipſi EF parallela, erit iſta diameter quæſita.

Eſto enim KI parameter ipſius KL. Jamque, ex ſuperius oſtenſis, parameter iſta KI ſuperabit parametrum EH per quadruplum portionis EQ. Sed, ex conſtructione, per hoc idem quadruplum parameter data ſuperat eandem EH. Quare erit KI æqualis datæ parametro: & propterea erit KL quæſita diameter.

In ſecundo autem caſu ſolutio problematis fiet hoc pacto. Sit KL diameter data, & KI parameter ejus. Capiatur exceſſus, quo KI ſuperat datam parametrum; & quadranti ejus æqualis conſtituatur recta KP, ipſi KL in directum exiſtens. Erigatur deinde ex puncto P perpendicularis PE, parabolæ occurrens

rens in E. Et, ducta per punctum E recta EF, ipſi KL parallela, erit iſta diameter optata.

Sit namque EH parameter ipſius EF. Jamque, ex ſuperius oſtenſis, ducta KQ, ipſi EF perpendiculari, parameter KI ſuperabit parametrum EH per quadruplum portionis EQ, ſive KP. Sed, ex conſtructione, per idem hoc quadruplum eadem KI ſuperat parametrum datam. Quare erit EH æqualis datæ parametro: & propterea quæſita diameter erit ipſa EF.

Patet autem, problema eſſe ſemper ſolutionis capax in primo caſu, ſed non item in ſecundo; quia fieri poteſt, ut perpendicularis PE minime occurrat parabolæ: quod quidem quum contingit, nulla erit diameter, cui data parameter competit. Nec id mirum eſſe debet; quandoquidem, ſi parameter data minor ſit ea, quæ refertur ad axem, omnino neceſſe eſt, ut problema ſit ſolutu impoſſibile.

VIII. *Data parametro unius diametri, invenire parametrum cujuſvis alterius diametri.* Fig. 69.

VIII. Non diſſimili artificio, *data parametro unius diametri, inveniri poterit parameter cujuſvis alterius diametri*. Sint enim EF, KL duæ quævis parabolæ diametri. Et, data parametro unius diametri EF, quæ ſit EH, oporteat, invenire parametrum alterius diametri KL.

Ex vertice K alterius diametri demittatur ſuper EF perpendicularis KQ. Jamque duo contingere poſſunt. Primo nempe, ut punctum Q cadat infra verticem E. Et ſecundo, ut idem punctum Q cadat ſupra verticem E. In priore caſu parameter diametri KL major erit parametro diametri EF. In ſecundo

vero caſu erit per contrarium minor.

In utroque autem caſu differentia parametrorum eſt ſemper quadruplum portionis EQ. Unde, ſiquidem contingat, ut punctum Q cadat infra verticem E, invenietur parameter diametri KL, addendo quadruplum ejus portionis ad EH, quæ eſt parameter ipſius EF. Quod ſi vero accidat, ut punctum Q cadat ſupra verticem E, habebitur quæſita parameter, ſubducendo ex EH quadruplum ejuſdem illius portionis.

Fieri quoque poteſt, ut perpendicularis, quæ demittitur ſuper EF ex vertice alterius diametri K, cadat in ipſum verticem E. Et in iſto caſu, evaneſcente portione EQ, utraque conſtructio nobis oſtendet, eandem EH eſſe etiam parametrum diametri KL. Quod quidem mirum eſſe non debet; quia, quum id contingit, binæ diametri EF, KL reperiuntur æqualiter hinc inde ab axe diſtantes.

IX. *Alia ejuſdem problematis ſolutio in medium affertur.*

IX. Poſſumus quoque, *data parametro unius diametri, reperire parametrum alterius diametri*, eodem illo artificio, quo ſuperius uſi ſumus, ad idem problema ſolvendum in hyperbola, & ellipſi. Sint enim AB, EF duæ quævis parabolæ diametri. Et, data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire diametrum alterius EF. (Fig. 70.)

Sit AD parameter diametri AB, quæ cum ipſa AB ponatur in directum. Tum, ſecta AD bifariam in puncto M, deſcribatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipſi EF productæ in puncto N. Extenda-

datur porro EN uſque ad punctum H: ita, ut ſit EH dupla ipſius EN. Et erit EH parameter diametri EF.

Demittatur ſiquidem ſuper AB perpendicularis EG. Jamque, per ſuperius oſtenſa, differentia parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF, eſt quadruplum portionis AG. Unde eo res redit, ut oſtendamus rectas AD, EH differre a ſe mutuo per quadruplum ipſius AG.

Id vero facili negotio oſtendemus. Nam, demiſſo ex puncto N ſuper eadem AB perpendiculo alio NO, erunt duæ AG, MO ęquales inter ſe: proindeque differentia rectarum AM, EN erit duplum portionis AG. Sed ex conſtructione AD eſt dupla ipſius AM, & EH dupla ipſius EN. Itaque differentia rectarum AD, EH erit quadruplum ejuſdem AG.

X. *Lemma pro determinatione angulorum, quos diametri cum ſuis ordinatis conſtituunt.* Fig. 69.

X. Reliquum jam eſt, ut breviter oſtendamus quæcumque pertinent ad angulos, quos parabolæ diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt. Hunc in finem, *præmittendum eſt prius ſequens theorema*, quod ſi AB, EF ſint duæ quævis parabolæ diametri, ſuper quibus ex alternis earum verticibus ducantur ordinatæ EG, AO; ordinatæ iſtæ ſint in ſubduplicata ſuarum parametrorum ratione.

Sit enim AD parameter diametri AB, & EH parameter diametri EF. Erit igitur, ob parabolæ naturam, EG quadratum æquale rectangulo DAG, & AO quadratum æquale rectangulo HEO. Quare erit, ut EG quadratum ad AO quadratum, ita rectangulum DAG ad rectangulum HEO.

Et quoniam ex ſuperius oſtenſis, ordinatæ EG, AO abſcindunt ex diametris AB, EF portiones æquales; erit abſciſſa AG æqualis abſciſſæ EO. Unde, quemadmodum rectangulum DAG eſt ad rectangulum HEO, ut AD ad EH; ita in hac eadem ratione erit pariter EG quadratum ad AO quadratum: & propterea ipſæ ordinatæ EG, AO erunt in ſubduplicata ratione parametrorum AD, EH.

XI. *Theoremata de angulis, quos efficiunt diametri cum ſuis ordinatis.*

XI. Hinc vero prono alveo fluunt quæcumque obtinent *circa angulos, quos parabolæ diametri cum ordinatis ſuis conſtituunt.*

FIG. 69.

Nimirum conſequitur primo, *ſinum anguli, quem diameter quavis conſtituit cum ordinatis ſuis, eſſe ad radium in ſubduplicata ratione ejus, quam habet parameter axis ad parametrum ejus diametri.*

Poſito enim, quod AB ſit axis parabolæ, & EF diameter quævis, ſi ducatur ad hanc diametrum ordinata AO, & ex puncto O demittatur ad axem perpendicularis OL; erit, ut ſinus anguli BAO ad radium, ita OL ad AO, ſive etiam ita EG ad AO. Sed EG ad AO eſt in ſubduplicata ratione parametrorum AD, EH. Quare in hac eadem ſubduplicata ratione erit etiam ſinus anguli BAO ad radium.

Conſequitur ſecundo, *ſinus angulorum, quos duæ quævis diametri conſtituunt cum ordinatis ſuis, eſſe in ſubduplicata ratione reciproca ſuarum parametrorum.*

Jam enim oſtenſum eſt, quod ſinus anguli, quem conſtituit diameter aliqua cum ſuis ordinatis, ſit ad radium in ſubduplicata ratio-

tio-

tione ejus, quam habet parameter axis ad parametrum ejus diametri. Quare, ex æquo perturbando, ſinus anguli, quem conſtituit diameter una cum ſuis ordinatis, erit ad ſinum anguli, quem efficit diameter altera cum ordinatis ſuis, in ſubduplicata ratione ejus, quam habet parameter iſtius ad parametrum illius.

Conſequitur demum, *angulum acutum, quem conſtituit diameter cum ordinatis ſuis, eo minorem evadere, quo magis ipſa diameter ab axe recedit.*

Nam, ex ſuperius oſtenſis, parameter diametri eo major evadit, quo magis ipſa diameter ab axe removetur. Sed ei parametro eſt reciproce proportionale quadratum ſinus, quem eadem diameter cum ſuis ordinatis conſtituit. Quare per contrarium, tam ſinus, quam ipſe angulus acutus, ad quem ſinus refertur, neceſſe eſt, ut eo minor fiat, quo magis diameter recedit ab axe.

FINIS.

IN-

606712
SBN

INDEX
LIBRORUM, ET CAPITUM,
Quæ in hoc Primo Tomo continentur.

LIBER I.
De Ortu, & Natura Sectionum Conicarum.

CAP.I. *Qua ratione oriatur conus, & quot modis plano ſecari poteſt.* 5

CAP.II. *Quæ curvæ ſectionum conicarum nomine veniunt, & quæ ſit earum origo.* 14

CAP.III. *De diametro ſectionum conicarum, deque ejus verticibus, ordinatis, & abſciſſis.* 22

CAP.IV. *Quæ ſit natura ellipſis relate ad diametrum definitur.* 30

CAP.V. *Quid hyperbolæ relate ad diametrum accidat, oſtenditur.* 39

CAP.VI. *Quæ ſit parabolæ relate ad diametrum natura aperitur.* 48

LI-

LIBER II.

De Sectionum Conicarum in Plano Deſcriptione.

CAP. I. *Qua ratione ellipſis in plano per conum deſcribi poſſit, oſtenditur.* 57
CAP. II. *Ratio deſcribendi hyperbolam in plano per conum explicatur.* 71
CAP. III. *Parabolam in plano per conum deſcribendi ratio aperitur.* 83
CAP. IV. *Qua ratione ellipſis in plano per ſolas rectas deſcribi poſſit, demonſtratur.* 96
CAP. V. *Ratio deſcribendi hyperbolã in plano per rectas ſolas explicatur.* 107
CAP. VI. *Quo pacto deſcribi poſſit parabola in plano per rectas oſtenditur.* 118

LIBER III.

De Conicarum Sectionum Diametris aliis.

CAP. I. *Ellipſis omnes aliæ diametri definiuntur.* 127
CAP. II. *Diametrorum ellipſis communia quædam oſtenduntur.* 139
CAP. III. *Hyperbolæ omnes aliæ diametri determinantur.* 152

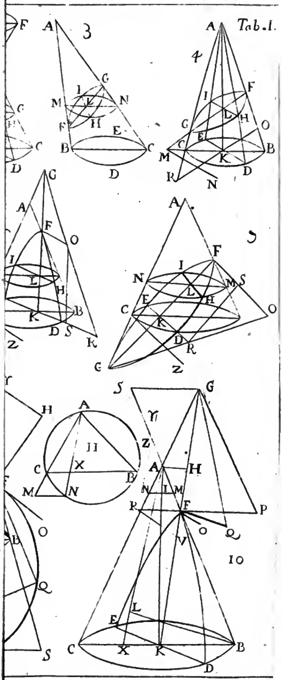
CAP.

CAP.IV. *Diametrorum hyperbolæ communia quædam demonſtrantur.* 168
CAP.V. *De conjugatis diametrorum hyperbolæ, & de curvis, ad quas eæ terminantur.* 179
CAP.VI. *Parabolæ omnes aliæ diametri determinantur.* 192
CAP.VII. *Diametrorum parabolæ communia quædam oſtenduntur.* 201

LIBER IV.

De Mutua Diametrorum, Parametrorumque comparatione.

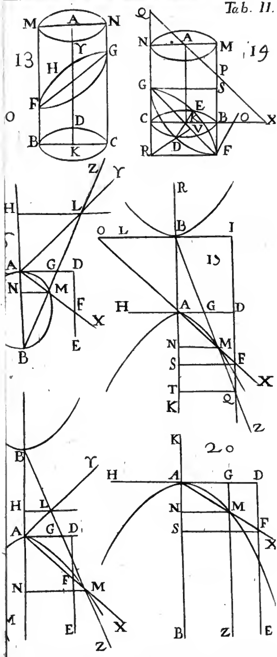
CAP.I. *Ellipſis diametri omnes inter ſe mutuo comparantur.* 213
CAP.II. *Parametri diametrorum ellipſis inter ſe mutuo conferuntur.* 228
CAP.III. *Problemata quædam circa ellipſis diametros, & parametros reſolvuntur.* 239
CAP.IV. *Hyperbolæ diametri omnes inter ſe mutuo comparantur.* 257
CAP.V. *Parametri diametrorum hyperbolæ inter ſe mutuo conferuntur.* 269
CAP.VI. *Solvuntur problemata quædam circa hyperbolæ diametros, & parametros.* 282
CAP.VII. *Parametri diametrorum parabolæ inter ſe mutuo comparantur.* 298


Tab.I.

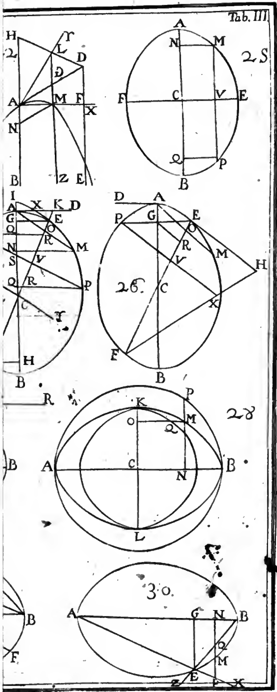
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

Tab. II.

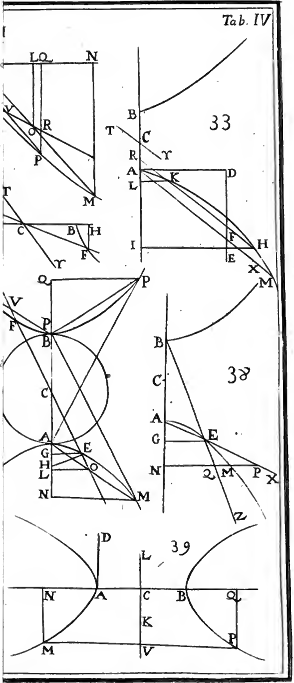


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

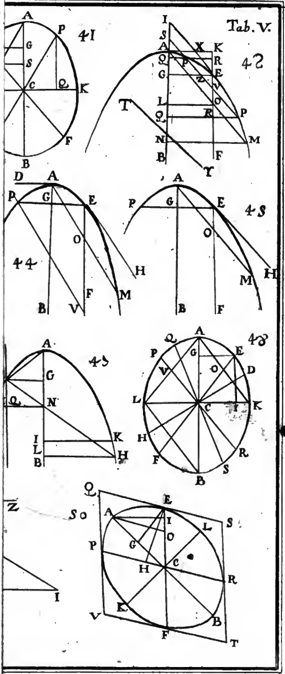

Tab. III
25
26.
28
30.

NAPOLI

Digitized by Google

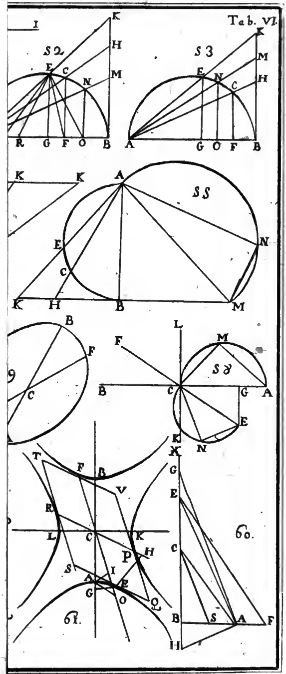

Tab. IV
33
38
39

Digitized by Google


Tab. V.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

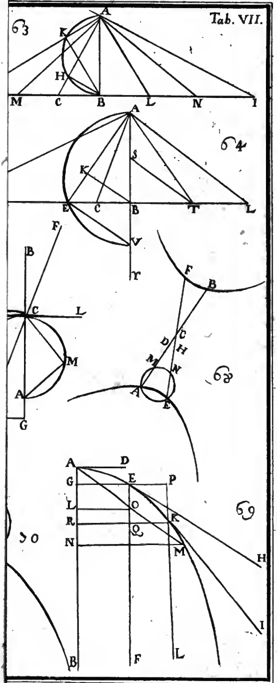
Digitized by Google


Tab. VI.
52
53
55
58
60.
61.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

Tab. VII.


63
A K H M C B L N I
64
A S K E C B T L V Y
B F C L M A G
F B C D H M N A E
68
A D G E P L O R K Q N M H I B F L
69
70

VITTORIO E
NAPOLI
Digitized by Google

Digitized by Google